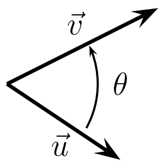
Géométrie et nombres complexes

TSTI2D

I - Rappels : géométrie analytique et produit scalaire

Le produit scalaire de deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$, est le nombre réel noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$ défini par



$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \,.\, \|\vec{u}\| \,.\, \cos\theta$$

Si A, B et C sont trois points du plan, alors :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \times \left\|\overrightarrow{AC}\right\| \cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = AB \times AC \times \cos\left(\widehat{BAC}\right)$$

Si de plus, dans un repère orthonormal (RON) on a les coordonnées $\vec{u}(x;y)$ et $\vec{v}(x';y')$, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$.

Exercice 1 On se place dans un RON. Dans chacun des cas, déterminer $\vec{u} \cdot \vec{v}$, $\|\vec{u}\|$ et $\|\vec{v}\|$.
En déduire alors $\cos(\vec{u}, \vec{v})$ puis une valeur de l'angle $(\vec{u}, \vec{v})$.
a) $\vec{u}(2;-1)$ et $\vec{v}(1;3)$ b) $\vec{u}(2;-1)$ et $\vec{v}(-1;3)$ c) $\vec{u}(2;-6)$ et $\vec{v}(9;3)$ d) $\vec{u}(2;0)$ et $\vec{v}(0;-7)$

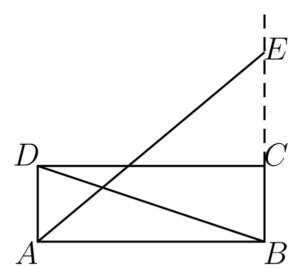
Propriété
- *Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.*
- *Les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires si et seulement si $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$.*

Exercice 2 Dans un RON, on considère les points $A(-3;1)$, $B(4;-1)$ et $C(1;15)$.
Les droites (AB) et (AC) sont-elles perpendiculaires ?

Exercice 3 Dans un RON, on considère les points $A(2;-1)$, $B(3;2)$ et $C(0;-2)$.

1. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AC}$.
2. Calculer les longueurs des côtés du triangle ABC.
3. Calculer les produits scalaires $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$.
4. En déduire au degré près les angles du triangle ABC.

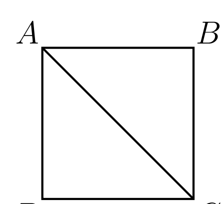
Exercice 4 On considère le rectangle $ABCD$ tel que $AB = 3$ et $AD = 1$.
Déterminer le point E de la droite (BC) tel que les droites (AE) et (DB) soient perpendiculaires.



II - Cercle trigonométrique, cosinus et sinus

1) Cercle trigonométrique, angles remarquables

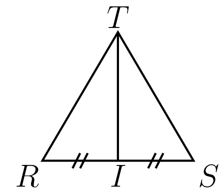
Exercice 5



1. $ABCD$ est un carré de côté 1.
   Calculer la longueur AC, puis en déduire les valeurs exactes de $\cos\dfrac{\pi}{4}$ et $\sin\dfrac{\pi}{4}$.

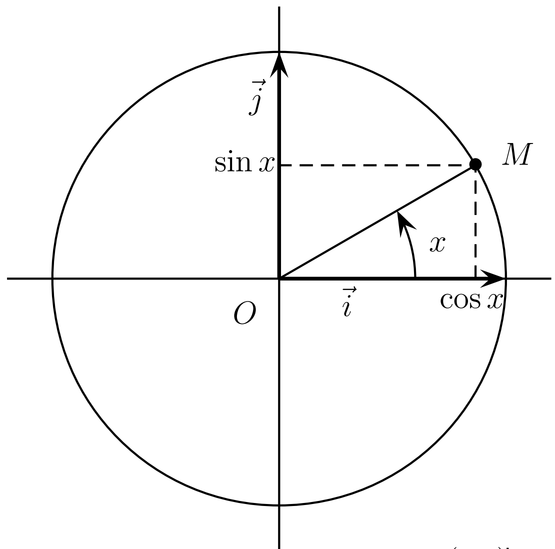
2. RST est un triangle équilatéral de côté 1.

   Calculer la longueur TI, en déduire les valeurs exates de $\cos\frac{\pi}{6}$, $\sin\frac{\pi}{6}$, $\cos\frac{\pi}{3}$ et $\sin\frac{\pi}{3}$.



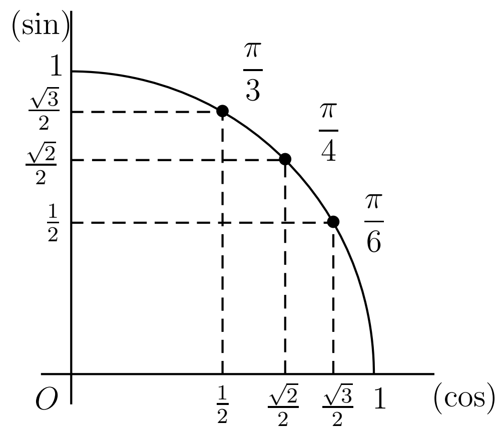
Définition *Soit M un point du cercle trigonométrique, et x une mesure de l'angle orienté $\left(\vec{i}, \overrightarrow{OM}\right)$.*

- *Le **cosinus** de x, noté $\cos x$, est l'abscisse de M.*
- *Le **sinus** de x, noté $\sin x$, est l'ordonnée de M.*



Angles remarquables

x	$0°$ 0 rad	$30°$ $\frac{\pi}{6}$ rad	$45°$ $\frac{\pi}{4}$ rad	$60°$ $\frac{\pi}{3}$ rad	$90°$ $\frac{\pi}{2}$ rad
$\sin x$	0	$\boldsymbol{\frac{1}{2}}$	$\boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{2}}$	$\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{2}}$	1
$\cos x$	1	$\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{2}}$	$\boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{2}}$	$\boldsymbol{\frac{1}{2}}$	0



Propriété *Pour tout réel x :*

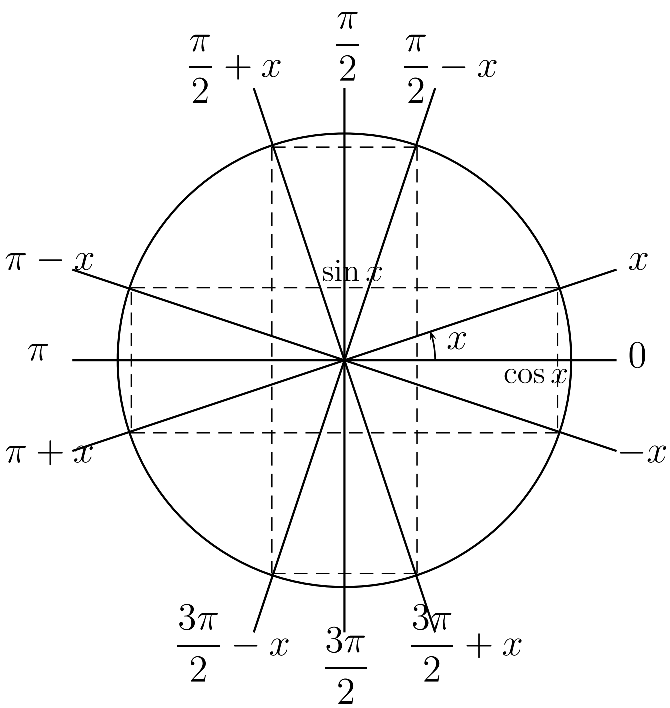
- $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$
- $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$
- $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ *(en notant $\cos^2 x = (\cos x)^2$ et $\sin^2 x = (\sin x)^2$)*

Exercice 6

Donner les valeurs exactes de :

a) $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ b) $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ c) $\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)$ d) $\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$ e) $\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)$

2) Angles associés



Pour tout nombre réel x,

$$\begin{cases} \cos(-x) = \cos x \\ \sin(-x) = -\sin x \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \sin x \\ \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \cos x \end{cases} \qquad \begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = -\sin x \\ \sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = \cos x \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos(\pi - x) = -\cos x \\ \sin(\pi - x) = \sin x \end{cases} \qquad \begin{cases} \cos(\pi + x) = -\cos x \\ \sin(\pi + x) = -\sin x \end{cases}$$

Exercice 7 Simplifier les expressions :

a) $A = \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) + \sin(-x) + \cos(-x)$ b) $B = \sin(\pi - x) + \cos(\pi + x) + \sin(x+\pi)$

c) $C = \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) + \cos(\pi - x) + \sin(\pi - x)$ d) $D = \cos(x+\pi) + \sin(\pi - x) + \cos(x + 2\pi)$

3) Equations trigonométriques

Propriété *Les solutions dans* $\mathbb{R}$ *de l'équation* $\cos x = \cos a$ *sont :* $\begin{cases} x = a + 2k\pi \\ x = -a + 2k\pi \end{cases}$,
où k *est un entier relatif quelconque.*

Propriété *Les solutions dans* $\mathbb{R}$ *de l'équation* $\sin x = \sin a$ *sont :* $\begin{cases} x = a + 2k\pi \\ x = \pi - a + 2k\pi \end{cases}$,
où k *est un entier relatif quelconque.*

Exercice 8 Résoudre les équations sur $\mathbb{R}$, puis sur $[0; 2\pi[$:

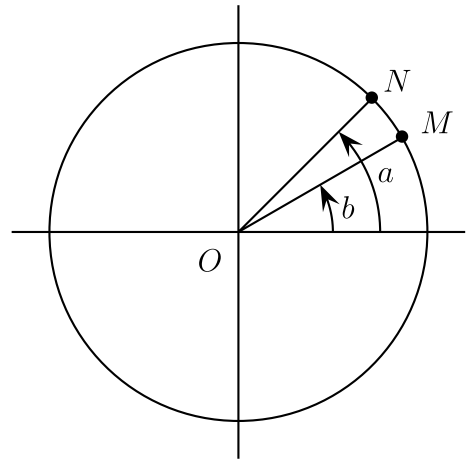
a) $\cos x = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$ b) $\sin x = \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ c) $\cos t = \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)$ d) $\sin t = \sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$

e) $\cos x = 0$ f) $\cos x = \frac{1}{2}$ g) $\sin t = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ h) $\cos x = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

i) $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$ j) $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ k) $\sin x = \cos x$ l) $\cos(2x) = \sin\left(\frac{x}{2}\right)$

4) Formules d'addition et de duplication

Exercice 9 On considère les points M et N du cercle trigonométrique donnés sur le graphique ci-contre.



1. Donner les coordonnées des points M et N, puis des vecteur $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{ON}$. En déduire une expression de $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON}$.

   En utilisant une autre expression du produit scalaire $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON}$, donner une formule exprimant $\cos(a-b)$ à l'aide des cosinus et sinus de a et b.
2. Appliquer la formule précédente avec les nombres a et $-b$ afin d'obtenir une formule exprimant $\cos(a+b)$.
3. Appliquer la formule précédente avec les nombres $\dfrac{\pi}{2}-a$ et $-b$ afin d'obtenir une formule exprimant $\sin(a+b)$.
4. Appliquer la formule précédente avec les nombres a et $-b$ afin d'obtenir une formule exprimant $\cos(a-b)$.

Propriété Formules d'addition :

$$\begin{aligned}
\cos(a+b) &= \cos a\cos b - \sin a\sin b\\
\cos(a-b) &= \cos a\cos b + \sin a\sin b\\
\sin(a+b) &= \sin a\cos b + \sin b\cos a\\
\sin(a-b) &= \sin a\cos b - \sin b\cos a
\end{aligned}$$

Formule de duplication :

$$\begin{aligned}
\cos(2a) &= \cos^2 a - \sin^2 a\\
\sin(2a) &= 2\sin a\cos a
\end{aligned}$$

Exercice 10 À l'aide des formules d'addition, montrer que :

a) $2\cos\left(\dfrac{2x}{3}-\dfrac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}\cos\left(\dfrac{2}{3}x\right)+\sin\left(\dfrac{2}{3}x\right)$

b) $\sin\left(x+\dfrac{5\pi}{6}\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \dfrac{1}{2}\cos x$

c) $4\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2}\sin(2x) - 2\sqrt{2}\cos(2x)$

Exercice 11 En utilisant les formules d'addition, donner les valeurs exactes des cosinus et sinus de :

a) $\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{4}$ b) $\dfrac{5\pi}{12}=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{6}$ c) $\dfrac{7\pi}{12}=\dfrac{3\pi}{4}-\dfrac{\pi}{6}$.

III - Nombres complexes

1) Formes algébrique et trigonométrique

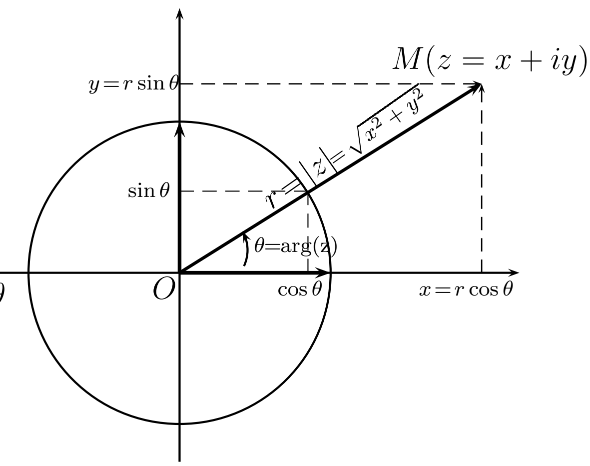
Tout nombre complexe s'écrit sous la forme algébrique $z=x+yi$, où x et y sont des nombres réels, et i est un nombre (non réel !) tel que $i^2=-1$.

Les règles de calcul algébriques sur les nombres réels s'étendent aux nombres complexes en prenant en plus en compte que $i^2=-1$.

Exercice 12 Exprimer sous forme algébrique les nombres complexes :

• $(2+3i)+(-1+6i)$ • $(5+i)-(3-2i)$ • $(1+i)(3-2i)$ • $(4+i)(-5+3i)$ • $(2-i)^2$
• i^3 • i^4 • i^5 • i^{2000} • $(x+iy)(x'+iy')$ • $(x+iy)^2$ • $(2-3i)(2+3i)$ • $(a+ib)(a-ib)$

Définition *Dans le plan complexe un point M peut-être repéré par ses coordonnées cartésienne $(x;y)$, ou son affixe complexe $z=x+iy$, ou par ses coordonnées polaires $(r;\theta)$, avec $r=OM$ et $\theta=(\vec{u};\overrightarrow{OM})$.*



On a les relations :

$$\left\{\begin{array}{l} r=\sqrt{x^2+y^2} \\ \cos\theta=\dfrac{x}{r}\ ,\ \sin\theta=\dfrac{y}{r}\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta\end{array}\right.$$

L'affixe z du point M s'écrit alors,

$$z=r\big(\cos\theta+i\sin\theta\big)$$

Cette écriture est la **forme trigonométrique** *de z.*

Exercice 13 Écrire sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants :

$z_1=3$ $z_2=-4$ $z_3=2i$ $z_4=-1+i$ $z_5=-\sqrt{3}+i$

$z_6=-17$ $z_7=-6\sqrt{3}+6i$ $z_8=5i$ $z_9=4-4i$ $z_{10}=\sqrt{6}+i\sqrt{2}$.

2) Forme exponentielle

Définition *Pour tout réel θ, on pose $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$.*
Ainsi, à partir de la forme trigonométrique : pour tout nombre complexe z, on a

$$z=r\left(\cos\theta+i\sin\theta\right)=re^{i\theta}$$

$e^{i\theta}$ est une exponentielle complexe. En particulier, toutes les propriétés algébriques de l'exponentielle s'étendent aux nombres complexes :

- Produit : si $z=re^{i\theta}$ et $z'=r'e^{i\theta'}$, alors $zz'=rr'e^{i(\theta+\theta')}$
- Inverse : si $z=re^{i\theta}$, alors $\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{re^{i\theta}}=\dfrac{1}{r}e^{-i\theta}$
- Quotient : si $z=re^{i\theta}$ et $z'=r'e^{i\theta'}$, alors $\dfrac{z}{z'}=\dfrac{r}{r'}e^{i(\theta-\theta')}$

Exercice 14 Écrire les nombres de l'exercice précédent sous forme exponentielle.

Exercice 15 Écrire sous forme algébrique les nombres complexes :

$z_1=e^{i\frac{\pi}{4}}$ $z_2=e^{2i\frac{\pi}{3}}$ $z_3=2e^{-i\frac{\pi}{6}}$ $z_4=-3e^{-i\frac{\pi}{2}}$ $z_5=e^{i\frac{\pi}{6}}+e^{-i\frac{\pi}{6}}$ $z_6=2e^{i\frac{\pi}{3}}+\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$

Exercice 16 On considère les nombres complexes $z_1=1+i\sqrt{3}$ et $z_2=1-i$.

1. Déterminer le module et un argument de z_1 eet z_2.
2. En déduire le module et un argument des nombres $\dfrac{1}{z_1}$, $z_1\times z_2$, $\dfrac{z_1}{z_2}$, $(z_1)^2$, $(z_2)^3$.

3) Conjugué d'un nombre complexe

Définition *On appelle nombre complexe conjugué du nombre $z=a+bi$, le nombre, noté $\overline{z}$,*

$$\overline{z}=a-bi$$

Par exemple, $\overline{3+3i}=3-2i$, $\overline{-2-2i}=-2+2i$.

On utilise en particulier le conjugué d'un nombre complexe pour écrire l'inverse ou le quotient de nombres complexes sous forme algébrique.

Par exemple, si $z=1+3i$, $\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{1+3i}=\dfrac{1}{1+3i}\times\dfrac{1-3i}{1-3i}=\dfrac{1-3i}{10}=\dfrac{1}{10}-\dfrac{3}{10}i$.

Exercice 17 Écrire sous forme algébrique : a) $\dfrac{1}{2+3i}$ b) $\dfrac{3}{4-i}$ c) $\dfrac{3+i}{2-i}$ d) $\dfrac{1+i}{1-i}$ e) $\dfrac{1}{i}$ f) $\dfrac{3-i}{i}$

Propriété *Le nombre conjugué du nombre complexe $z=re^{i\theta}$ est $\overline{z}=re^{-i\theta}$.*

Exercice 18 **Vrai ou faux ?** Soit $z_1=1-i$, $z_2=1+i\sqrt{3}$ et $z_3=1+i$.

a) $z_1z_2=2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$ b) $z_1\overline{z_2}=2\sqrt{2}e^{-i\frac{7\pi}{12}}$ c) $\dfrac{z_1}{z_2}=\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{2}}$

Exercice 19 **QCM** Pour chaque question une seule des propositions est exacte. On désigne par i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

1. La forme algébrique du nombre complexe $\dfrac{1}{2+i}$ est :
   a) $\dfrac{2}{3}-\dfrac{1}{3}i$ b) $\dfrac{2}{5}-\dfrac{1}{5}i$ c) $\dfrac{2}{5}+\dfrac{1}{5}i$ d) $\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{3}i$
2. Le nombre complexe $z=-2+2i$ put se mettre sous la forme :
   a) $2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$ b) $2\sqrt{2}e^{3i\frac{\pi}{4}}$ c) $2\sqrt{2}e^{5i\frac{\pi}{4}}$ d) $4e^{3i\frac{\pi}{4}}$
3. Le nombre complexe conjugué de $z=4e^{i\frac{\pi}{6}}$ est :
   a) $-4e^{i\frac{\pi}{6}}$ b) $4e^{7i\frac{\pi}{6}}$ c) $4e^{-i\frac{\pi}{6}}$ d) $\dfrac{1}{4}e^{-i\frac{\pi}{6}}$
4. Soit A et B deux points d'affixes respectives z_A et z_B. On sait que $|z_A|=\sqrt{3}$ et $|z_B|=3$. On sait aussi qu'un argument de z_A est égal à $\dfrac{\pi}{3}$ et qu'un argument de z_B est égal à $\dfrac{\pi}{4}$.
   L'écriture exponentielle du produit $z_A\times z_B$ est :
   a) $3e^{i\frac{7\pi}{12}}$ b) $3\sqrt{3}e^{i\frac{7\pi}{12}}$ c) $3\sqrt{3}e^{i\frac{2\pi}{7}}$ d) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}e^{i\frac{\pi}{12}}$
5. Si $z_1=2e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $z_2=\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$, alors l'écriture exponentielle de $\dfrac{z_1}{z_2}$ est :
   a) $\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{12}}$ b) $\sqrt{2}e^{i\frac{11\pi}{12}}$ c) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{-i\frac{5\pi}{12}}$ d) $\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$