Intégration

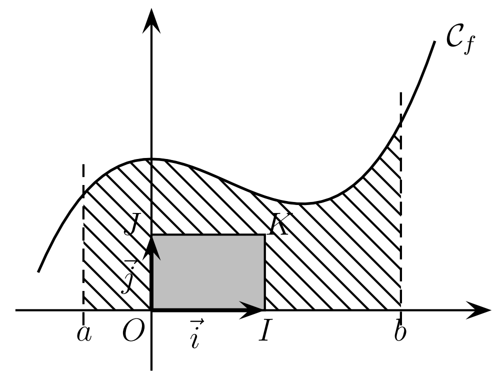
TSTI2D

I - Aire sous une courbe : définition de l'intégrale

Soit f une fonction "continue" et positive sur un intervalle $[a;b]$.
On note $\mathcal{C}_f$ sa représentation graphique dans un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$.

On cherche à déterminer l'aire du domaine $\mathcal{D}$ délimité par la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses, et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$.

L'unité d'aire est donnée par le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$: l'unité d'aire est l'aire du rectangle $OIKJ$.



Définition *Cette aire s'appelle* **l'intégrale de la fonction f de a à b** *; on la note* $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$.

<u>*Remarque :*</u> *Le "x" dans dans "dx" indique la variable par rapport à laquelle on effectue les calculs : c'est la variable d'intégration.*
C'est une variable dite muette : la lettre qui la désigne n'a pas d'importance :

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b f(t)\,dt=\int_a^b f(u)\,du=\int_a^b f(\alpha)\,d\alpha=\ \dots$$

Cette notation est celle aussi rencontrée pour la dérivée (plus souvent en physique) : $f'=\dfrac{df}{dx}$, *en électricité :* $i=\dfrac{dq}{dt}$ *ou encore en mécanique :* $v=\dfrac{dx}{dt}$ ...

Exercice 1 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=2x$. Représenter $\mathcal{C}_f$ et calculer $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,dx$.

Exercice 2 Calculer les intégrales $I=\displaystyle\int_1^3(2x-1)\,dx$ et $J=\displaystyle\int_{-1}^1(-2t+3)\,dt$.

Exercice 3 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par l'expression $f(x)=2x+1$.
Déterminer de façon explicite, pour tout réel $t\geq 0$, la fonction $F(t)=\displaystyle\int_0^t f(x)\,dx$.

II - Intégrale d'une fonction continue de signe quelconque

Définition *Un fonction f est continue en a si* $\displaystyle\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$.
Une fonction est continue sur un intervalle si elle est continue en tout point de cet intervalle.

Une fonction est continue en un point lorsque $f(x)$ prend des valeurs aussi proches que l'on veut de $f(a)$ dès que x est suffisamment proche de a.
Elle est continue sur un intervalle entier si elle l'est en tous les points de celui-ci : graphiquement, la courbe représentative d'une fonction continue est un trait "continu" obtenu "d'un seul trait", sans lever le crayon.

Propriété *Les fonctions polynômes, rationnelles, racines carrées, logarithme et exponentielle, et trigonométriques, sinus et cosinus, sont continues sur leur ensemble de définition.*

Propriété *Soit f une fonction continue sur un intervalle $I = [a; b]$ et F une primitive de f sur I, alors*

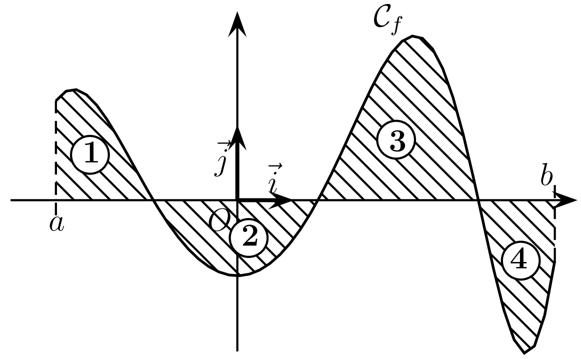
$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Exercice 4 Soit f la fonction définie sur $I = [0; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{3x^2 + 6x + 4}{(x+1)^2}$.

1. Vérifier que la fonction F définie sur I par $F(x) = \dfrac{3x^2 + 4x}{x+1}$ est une primitive de f sur I.
2. En déduire la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$.

Exercice 5 Calculer les intégrales : $I = \displaystyle\int_0^2 2x\,dx$, $J = \displaystyle\int_1^3 (2x-1)\,dx$, $K = \displaystyle\int_{-1}^1 (2t+3)\,dt$, $L = \displaystyle\int_0^2 x^2\,dx$, $M = \displaystyle\int_0^1 e^x\,dx$, $N = \displaystyle\int_2^4 \frac{1}{x+1}\,dx$ et $P = \displaystyle\int_0^\pi \cos x\,dx$.

D'une manière plus générale, pour une fonction f quelconque (continue mais pas forcément positive), l'intégrale de f sur $[a; b]$ est l'aire **algébrique** du domaine compris entre la courbe représentative de f et l'axe des abscisses.



L'intégrale de f est la somme des aires algébriques des domaines sur lesquels f garde un signe constant.

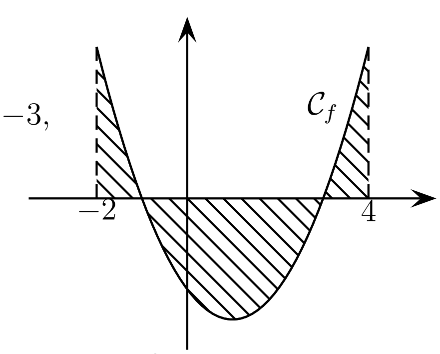
$$\int_a^b f(x)dx = \text{aire}\,(\mathcal{D}_1) - \text{aire}\,(\mathcal{D}_2) + \text{aire}\,(\mathcal{D}_3) - \text{aire}\,(\mathcal{D}_4)$$

On convient de plus que : $\displaystyle\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$.

En résumé, l'intégrale d'une fonction est l'aire algébrique, comptée positivement de gauche à droite (dans le sens croissant sur l'axe des abscisses) et au-dessus de l'axe des abscisses.

Si on souhaite calculer une aire géométrique, on calcule l'intégrale de f sur chacun des sous domaines où f est de signe constant et on ajoute les valeurs absolues de ces aires.

Exercice 6 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 2x - 3$, et on note $\mathcal{C}_f$ a courbe représentative dans un repère orthonormé.



1. Donner le tableau de signes de $f(x)$.
2. Calculer l'aire du domaine hachuré sur la figure ci-contre.

Exercice 7 Soit la fonction f définie par $f(x) = 3x^2 - 4$. Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,dx$.

Représenter l'allure de la courbe représentative de f et interpréter graphiquement le résultat précédent.

Définition **Valeur moyenne d'une fonction**

Soit f continue sur $[a;b]$, avec $a<b$, alors la valeur moyenne de f sur $[a;b]$ est le nombre

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

Exercice 8 Calculer la valeur moyenne de chaque fonction sur l'intervalle donné :

a) $f(x) = x^2$ sur $[0;1]$ b) $g(x) = (2-x)(x-1)$ sur $[-1;0]$ c) $h(x) = e^x$ sur $[0;1]$

d) $k(x) = e^{-3x+1}$ sur $[-1;1]$ e) $l(x) = \dfrac{2}{3x+1}$ sur $[0;3]$ f) $m(x) = \dfrac{5}{(2x+3)^2}$ sur $[0;1]$

III - Propriétés de l'intégrale

Propriété **Linéarité** *Pour toutes fonctions f et g continues sur $[a;b]$ et tout réel λ,*

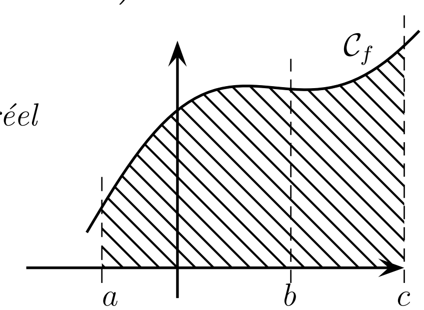
- $\displaystyle\int_a^b \Big(f(x)+g(x)\Big)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$
- $\displaystyle\int_a^b \lambda f(x)\,dx = \lambda\int_a^b f(x)\,dx$

Exercice 9 Calculer $I = \displaystyle\int_1^2 \left(x^3+\frac{2}{x}\right)\,dx$ et $J = \displaystyle\int_1^2 \left(\frac{3}{x^2}-\frac{2}{2x+1}\right)\,dx$

Propriété **Relation de Chasles**

Soit f une fonction continue sur $[a;c]$, et soit b un réel de $[a;c]$, alors

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$$



Propriété **Positivité**

- *Si $f(x)\geq 0$ pour tout $x\in[a;b]$, alors* $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$
- *Si $f(x)\leq 0$ pour tout $x\in[a;b]$, alors* $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \leq 0$

Propriété **Ordre et intégrale**

Soit f et g deux fonctions continues sur $[a;b]$ telles que, pour tout x de $[a;b]$, $f(x)\leq g(x)$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$

IV - Intégrales et primitives

Théorème *Soit f une fonction continue sur un intervalle I, et $a \in I$.*
Alors la fonction F définie sur I par $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ est **l'unique primitive de f sur I s'annulant en a.**

Exercice 10 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{2x}{2x^2+1}$.

Déterminer une expression de la fonction F définie par $F(t) = \int_0^t f(x)\,dx$.

Exercice 11 Soit F la fonction définie par $F(x) = \int_0^x \dfrac{1}{1+t^2}\,dt$.

Déterminer le sens de variation de F.

V - Aire d'un domaine délimité par deux courbes

Propriété *Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a;b]$, alors l'aire du domaine délimité par les courbes représentatives $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ de f et g et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ vaut*

$$\mathcal{A} = \int_a^b \left(f(x) - g(x)\right)\,dx$$

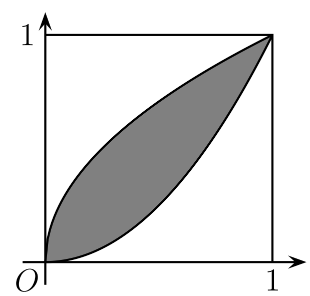
ou encore, en utilisant la linéarité de l'intégrale :

$$\mathcal{A} = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$$

Exercice 12 Dans un repère orthonormé, on considère le domaine $\mathcal{D}$ compris entre les courbes d'équations $y = \sqrt{x}$ et $y = x^2$.

Déterminer l'aire du domaine $\mathcal{D}$.

(On pourra se rappeler que $\sqrt{x} = x^{1/2}$, donc de la forme x^n, afin de chercher une primitive)



VI - Exercices

Exercice 13 Calculer les intégrales :

a) $I = \int_{-1}^1 \left(x^3 + x^2 + x\right)\,dx$ b) $I = \int_2^5 3\,dx$ c) $I = \int_0^3 dx$ d) $I = \int_{-1}^1 2r^3\,dr$

e) $I = \int_0^1 (2x+1)^3\,dx$ f) $I = \int_0^2 \dfrac{1}{(2x+1)^2}\,dx$ g) $I = \int_0^1 \left(\dfrac{1}{(x+3)^2} - \dfrac{1}{(2x+3)^2}\right)\,dx$

h) $I = \int_1^2 \left(x + 1 + \dfrac{1}{x+1}\right)\,dx$ i) $I = \int_1^3 \left(x - \dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x^2}\right)\,dx$ k) $I = \int_0^1 \dfrac{x+1}{x^2+2x+3}\,dx$

l) $I = \int_1^e \dfrac{1}{x}\ln x\,dx$ m) $I = \int_{-1}^1 \left(2e^x + 1\right)\,dx$ n) $I = \int_{\ln 2}^{\ln 3} e^{2x}\,dx$ p) $I = \int_0^1 \left(e^x - e^{-x}\right)\,dx$

q) $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\cos x - \sin x\right)\,dx$ r) $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos\left(2x\right)\,dx$ s) $I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \cos\left(3t + \dfrac{\pi}{6}\right)\,dx$ t) $I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \dfrac{\cos x}{\sin x}\,dx$

Exercice 14 Soit f la fonction définie sur $]1;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{4x-2}{x^2-1}$.

1. Vérifier que, pour tout x de $]1;+\infty[$, on a $f(x)=\dfrac{3}{x+1}+\dfrac{1}{x-1}$.
2. En déduire la valeur de l'intégrale $I=\displaystyle\int_2^4 \frac{4x-2}{x^2-1}$.

Exercice 15 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par l'expression $f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$.

Déterminer deux nombres réels a et b tels que, pour tout réel x, $f(x)=a+\dfrac{be^x}{1+e^x}$.

En déduire $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,dx$.

Exercice 16 Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=x\ln x-x$.

1. Déterminer la fonction dérivée f' de f.
2. En déduire l'intégrale $I=\displaystyle\int_1^e \ln x\,dx$.

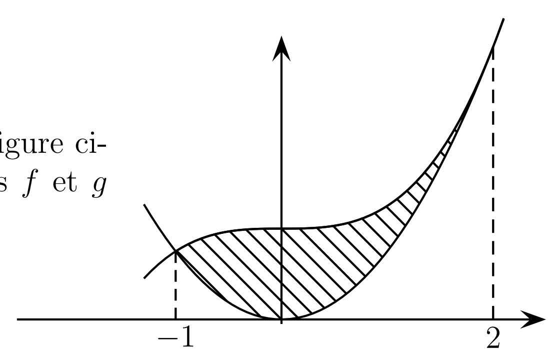
Exercice 17

1. Montrer que la fonction F définie sur $]0;+\infty[$ par $F(x)=\dfrac{1}{2}x^2\ln x-\dfrac{1}{4}x^2$ est une primitive de la fonction $f:x\mapsto x\ln x$.
2. En déduire $\displaystyle\int_1^{\sqrt{e}} x\ln x\,dx$.

Exercice 18 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t)=(2t+1)e^{-t}$.

1. Vérifier que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(t)=(-2t-3)e^{-t}$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer la valeur exacte de l'intégrale $I=\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt$.
3. On définie la fonction G pour $x\geqslant 0$ par $G(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$.
   a) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
   b) Dresser le tableau de variation de la fonction f.
   c) Tracer dans un repère l'allure de la courbe représentative de la fonction f, et interpréter à l'aide de ce graphique la valeur $G(x)$ pour un nombre $x\geqslant 0$.
   d) Déterminer la limite de G en $+\infty$.

Exercice 19 Calculer l'aire du domaine, hachuré sur la figure ci-contre, délimité par les courbes représentatives des fonctions f et g définies par $f(x)=x^3+4$ et $g(x)=3x^2$.



Exercice 20 **Longueur d'une chaînette**

Une chaînette est la courbe suivant laquelle se tend un fil homogène suspendu par ses extrémités à deux points fixes.

On admet que que la chaînette est la courbe représentative de la fonction f définie sur $[-1;1]$ par $f(x) = \dfrac{e^{2x}+e^{-2x}}{4}$.

1. a) Calculer la fonction dérivée f' de f.
   b) Étudier alors le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f.
   c) Tracer l'allure de la chaînette.
2. On admet que la longueur L de la chaînette (déformée et étirée sous l'action de son poids) est égale à l'intégrale $L = \displaystyle\int_{-1}^{1} \sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}\,dx$.
   a) En les calculant séparemment, montrer que les deux expressions $1+\left[f'(x)\right]^2$ et $\left[2f(x)\right]^2$ sont égales.
   b) En déduire la longueur L de la cahînette.

Exercice 21

A. On considère la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = 1-2\ln x$. On note $\mathcal{C}_g$ sa courbe représentative.
   1. La courbe $\mathcal{C}_g$ coupe l'axe des abscisses en un point d'abscisse α.
      Déterminer la valeur exacte du réel α.
   2. Calculer la fonction dérivée g' de g et dresser le tableau de variation de g.
   3. Déduire de ce qui précède le signe de $g(x)$ pour $x > 0$.

B. Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{2\ln x + 1}{x}$.

C. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x)$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

D. Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = \dfrac{f(x)}{x^2}$.
   En déduire le sens de variation de f.

E. a) Déterminer une primitive F de la fonction f sur $]0;+\infty[$.
   (Indication : on pourra écrire $f(x) = 2\times\dfrac{1}{x}\times\ln x + \dfrac{1}{x}$*).*
   b) Soit $I = \displaystyle\int_1^5 f(x)\,dx$. Calculer I, et en donner une valeur approchée au centième.