Limites de fonctions - Exercices

Exemple 1 : Soit la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par $f(x) = \dfrac{2x}{x+1}$.

1. Montrer que, pour tout $x \neq -1$, $f'(x) = \dfrac{2}{(x+1)^2}$ et dresser alors le tableaude variation de f.
2. Que se passe-t-il lorsque x se rapproche de -1 ? Comment se comporte $f(x)$?
   Et lorsque x devient de plus en plus grand, c'est-à-dire se rappproche de $+\infty$ ou $-\infty$?

Exemple 2 : On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par l'expression $f(x) = \dfrac{3}{x+3} + 5$.
Tracer à l'aide d'une calculatrice la courbe représentative de f. Conjecturer les limites de f en 0 et $+\infty$.

Exemple 3 : Même exercice que précédemment avec f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{3}{x+3} + \dfrac{10^{-4}}{x^2}$.

Exemple 4 : Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = \dfrac{(50 + x^{10})^2 - 2500}{x^{10}}$.

1. a) Tracer à l'aide d'une calculatrice la courbe de f dans une fenêtre avec $x_{min} = 0$, $x_{max} = 10$, $y_{min} = 0$ et $y_{max} = 1000$.
   Conjecturer alors la limite en 0 de f.

   b) Changer la taille de la fenêtre avec $x_{min} = 0$, $x_{max} = 0,1$, $y_{min} = 0$ et $y_{max} = 200$.
   Ce zoom permet-il de confirmer la conjecture précédente ?
2. Développer $(50 + x^{10})^2$ et montrer que, pour tout $x > 0$, $f(x) = 100 + x^{10}$.
   En déduire la limite $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

Exercice 1

Déterminer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 + 3x^2 - 6$ b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x+2}$ c) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{1-2x}{(x-3)^2}$ d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x - 3 + \dfrac{1}{x^2+x+1} \right)$

Exercice 2

Déduire de chacune des limites suivantes, si possible, l'équation d'une asymptote verticale ou horizontale à la courbe représentative de la fonction f.

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 3$ b) $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = -\infty$ c) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -6$ d) $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f(x) = +\infty$

e) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ f) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$ g) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

Exercice 3

On considère la fonction f définie sur $]1; +\infty[$ par l'expression $f(x) = \dfrac{3x+1}{x-1}$.

1. Déterminer les limites de f en 1 et $+\infty$.
   Interpréter graphiquement ces résultats en terme d'asymptote.
2. Calculer l'expression de la dérivée f' de f. En déduire le sens de variation de f.
3. Dresser le tableau de variation complet de f (en y incluant les résultats sur les limites).
4. Représenter graphiquement l'allure de la courbe représentative de f à l'aide des résultats précédents.

Exercice 4

Déterminer les limites aux bornes de son ensemble de définition de la fonction f dans chacun des cas suivants :

a) f définie sur $]2; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 6}{x - 2}$

b) f définie sur $]1; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{-2x^2 + x - 3}{x(x-1)}$

Exercice 5 Étudier les limites de la fonction f aux valeurs demandées, et interpréter graphiquement :

a) $f(x) = 2x + 1 + \dfrac{1}{x^2}$ en 0, en $+\infty$ et en $-\infty$ b) $f(x) = (4 - x^2)(3x - 2)$ en 0, en $+\infty$ et en $-\infty$

c) $f(x) = 4x - 1 + \dfrac{1}{x - 3}$ en 3, en $+\infty$ et en $-\infty$ d) $f(x) = \dfrac{4x}{4 - x}$ en 0 et en 4

Exercice 6 Déterminer les limites suivantes :

a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \sqrt{5 - \frac{4}{x^2}}$ b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(2 - \frac{1}{x}\right)^4$ c) $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \sqrt{\frac{2 - x}{x}}$ d) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \sqrt{4x^2 + 9 - \frac{16}{x^2 + 4}}$

Exercice 7 Determiner les limites suivantes :

a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(x^5 - 6x^4 + 3x^2 - 12\right)$ b) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \left(x^3 + x + 3\right)$ c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{9x + 2}{3x - 7}$ d) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{9x^2 + 2x}{3x^3 - 7}$

e) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{9x + 2}{x - 3}}$ f) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \sqrt{\frac{9x + 2}{x - 3}}$ g) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(x^2 - x + \frac{1}{x^2}\right)$ h) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(x^2 - x + \frac{1}{x^2}\right)$

Exercice 8 On considère la fonction f définie sur l'intervalle $\left]-\dfrac{1}{2}; +\infty\right[$ par $f(x) = 2x - 3 + \dfrac{9}{2x + 1}$.
On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1. a) Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to-\frac{1}{2}} f(x)$.
   b) Que peut-on dire du résultat précédent pour la courbe $\mathcal{C}$?
2. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$.
3. On désigne par f' la fonction dérivée de f.
   Montrer que, pour tout x de $\left]-\dfrac{1}{2}; +\infty\right[$, $f'(x) = \dfrac{8(x + 2)(x - 1)}{(2x + 1)^2}$.
   En déduire le tableau de variation de f sur $\left]-\dfrac{1}{2}; +\infty\right[$.
   Compléter ce taleau de variation en y portant les limites obtenus au 1. et 2.
4. Déduire du tableau de variation le signe de $f(x)$ lorsque x varie dans $\left]-\dfrac{1}{2}; +\infty\right[$.
5. Indiquer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 10$ sur $\left]-\dfrac{1}{2}; +\infty\right[$.

Exercice 9 Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]2; +\infty[$ par $f(x) = x - 1 - \dfrac{2}{x - 2}$.
On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$, et Δ la droite d'équation $y = x - 1$.

1. Déterminer les limtes de f aux bornes de son ensemble de définition.
   Préciser les éventuelles asymptotes à $\mathcal{C}$.
2. a) Soit f' la fonction dérivée de f. Déterminer $f'(x)$.
   b) Montrer que, pour tout x de $]2; +\infty[$, $f'(x) > 0$.
   En déduire le tableau de variation de f.
   Compléter ce tableau avec les limites calculées précédemment. Tracer alors l'allure de la courbe $\mathcal{C}$.
3. Soit $x \in]2; +\infty[$; on note M le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse x, et N le point de Δ d'abscisse x.
   Placer les points M et N sur le graphique précédent.
   Déterminer la distance MN en fonction de x, puis la limite de cette distance lorsque x tend vers $+\infty$.
   Interpréter graphiquement ce résultat.