Fonctions logarithmes

I - Fonction logarithme népérien

Théorème *La fonction logarithme népérien, notée ln, est la primitive de la fonction inverse* $x \mapsto \dfrac{1}{x}$*, définie sur* $]0;+\infty[$ *qui s'annule en 1.*

En d'autres termes, on a pour cette fonction ln,
- $\ln(1) = 0$
- Pour tout réel $x > 0$, $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$

Corollaire *Soit* I *un intervalle de* $\mathbb{R}$*, et* u *une fonction strictement positive et dérivable sur* I*, alors la fonction* $f : x \mapsto \ln[u(x)]$ *est dérivable sur* I *avec, pout tout* x *de* I*,* $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$.

Exemples :
- Sur $]0;+\infty[$, $f : x \mapsto \ln(2x)$ est de la forme $f = \ln(u)$ avec $u(x) = 2x$ donc $u'(x) = 2$ et alors $f'(x) = \dfrac{2}{2x} = \dfrac{1}{x}$
- Sur $]2;+\infty[$, $f : x \mapsto \ln(x-2)$ est de la forme $f = \ln(u)$ avec $u(x) = x-2$ donc $u'(x) = 1$ et alors $f'(x) = \dfrac{1}{x-2}$
- Sur $\mathbb{R}$, $f : x \mapsto \ln(x^2+1)$ est de la forme $f = \ln(u)$ avec $u(x) = x^2+1$ donc $u'(x) = 2x$ et alors $f'(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$

Exercice 1 Déterminer les équations des tangentes à la courbe représentative du logarithme népérien aux points d'abscisses $\dfrac{1}{2}$, 1 et 2.
Tracer ces tangentes et une allure possible de la courbe du logarithme népérien.

Exercice 2 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(2x^2+2)$.
1. Déterminer les équations des tangentes à $\mathcal{C}_f$ aux points d'abscisses -1, 0 et 1.
2. À l'aide de la calculatrice, compléter le tableau de valeurs :

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$									

3. Placer les points de $\mathcal{C}_f$ corresponds aux valeurs précédentes, les tangentes étudiées précédemment, puis l'allure de $\mathcal{C}_f$.

Exercice 3 Calculer la fonction dérivée des fonctions suivantes : a) $f(x) = x - 2 - \ln(x)$

b) $f(x) = x\ln(x)$ c) $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$ d) $f(x) = (\ln(x))^2$ e) $f(x) = (x+1)\ln(x) - x$

f) $f(x) = \ln\left(\dfrac{x+3}{2-x}\right)$ g) $f(x) = 0,2x + 3 - 2,6\ln(x+2)$ h) $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2 + 1 - \ln(x)$

i) $f(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{\ln(x)}{x}$ j) $f(x) = (\ln(x))^5$ k) $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x+1}$ l) $f(x) = \dfrac{3\ln(x)+1}{\ln(x)}$

Exercice 4 Soit la fonction f définie et dérivable sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = 2\ln(x) + \dfrac{4}{x} - 5$.

1. a) Déterminer graphiquement, à l'aide de la calculatrice, $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

   b) On admet que $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$. Que peut-on en déduire graphiquement ?

2. a) Calculer $f'(x)$ et vérifier que, pour tout $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{2x-4}{x^2}$.

   b) Étudier le signe de $f'(x)$ sur $]0;+\infty[$, et en déduire le sens de variation de f.

3. Donner le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$, puis en donner une valeur approchée à 10^{-1} près.

Exercice 5 Soit la fonction f définie sur $I = \left]\dfrac{1}{2};+\infty\right[$ par $f(x) = \dfrac{2}{2x-1}$.

1. Déterminer une primitive F de f sur I.
2. Déterminer la primitive G de f sur I qui s'annule en 5.

Exercice 6 Donner l'expression d'une primitive F des fonctions définies par les expressions suivantes :

a) $f(x) = \dfrac{6x}{3x^2+3}$ b) $f(x) = \dfrac{2}{2x-3}$ c) $f(x) = \dfrac{1}{2x-3}$ d) $f(x) = \dfrac{24x^2}{-4x^3+2}$ e) $f(x) = \dfrac{2x-1}{x^2-x+2}$

f) $f(x) = 3x+4+\dfrac{1}{2x+4}$ g) $f(x) = 1+\dfrac{1}{x-3}+\dfrac{2}{x+2}$ h) $f(x) = -\dfrac{5}{x}+\dfrac{3x^2+2}{x^3+2x}-\dfrac{2x}{\left(x^2+3\right)^2}$

II - Propriétés algébriques du logarithme

D'après la propriété précédente, $f : x \mapsto \ln(ax)$ a la même dérivée que la fonction ln : $f'(x) = \dfrac{a}{ax} = \dfrac{1}{x}$.
f et ln sont donc deux primitives de la fonction inverse $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ et donc, il existe une constante telle que, pour tout x réel, $f(x) = \ln(x) + k$.
Comme $f(1) = \ln(a\times 1) = \ln(a)$, et $f(x) = \ln(1) + k = 0 + k = k$, on a donc $k = \ln(a)$ et alors

$$f(x) = \ln(ax) = \ln(x) + \ln(a)$$

Propriété *Pour tous nombres réels a et b strictement positifs,* $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$.

En prenant $b = \dfrac{1}{a}$, on a $\ln\left(a\times\dfrac{1}{a}\right) = \ln(1) = 0$ et par ailleurs $\ln\left(a\times\dfrac{1}{a}\right) = \ln(a) + \ln\left(\dfrac{1}{a}\right) = 0$, d'où

Propriété *Pour tout réel $a > 0$,* $\ln\left(\dfrac{1}{a}\right) = -\ln(a)$.

En écrivant alors le quotient $\dfrac{a}{b}$ comme le produit $a\times\dfrac{1}{b}$, on obtient maintenant

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln\left(a\times\frac{1}{b}\right) = \ln(a) + \ln\left(\frac{1}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$$

Propriété *Pour tous réels a et b strictement positifs,* $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$.

Comme $a^2 = a \times a$ et plus généralement pour un entier naturel n non nul, $a^n = a \times a \times \cdots \times a$, on a aussi une expression du logarithme de la puissance d'un nombre :

$$\begin{aligned}\ln\left(a^2\right) &= \ln\left(a \times a\right) = \ln(a) + \ln(a) = 2\ln(a)\\ \ln\left(a^n\right) &= \ln\left(a \times a \times \cdots \times a\right) = \ln(a) + \ln(a) + \cdots + \ln(a) = n\ln(a)\end{aligned}$$

Comme de plus, $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$, on a aussi $\ln\left(a^{-n}\right) = \ln\left(\dfrac{1}{a^n}\right) = -\ln\left(a^n\right) = -n\ln(a)$, et ainsi

Propriété *Pour tout réel $a > 0$ et tout entier n relatif,* $\ln\left(a^n\right) = n\ln(a)$.

Par exemple, $\ln\left(3^5\right) = 5\ln(3)$, $\ln\left(4^-2\right) = -2\ln(4)$
et bien sûr... $\ln\left(3^1\right) = \ln(3) = 1\ln(3)$ et $\ln\left(3^0\right) = \ln(1) = 0 = 0\ln(3)$.

Avec ces propriétés sur les puissances, on a aussi, pour les racines, avec $a > 0$,

$$\ln(a) = \ln\left(\sqrt{a}^2\right) = 2\ln\left(\sqrt{a}\right)$$

et donc

Propriété *Pour tout réel $a > 0$,* $\ln\left(\sqrt{a}\right) = \dfrac{1}{2}\ln\left(a\right)$.

Comme pour tout entier n, $\ln\left(a^n\right) = n\ln(a)$, on écrit de même à partir de la relation précédente, $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$.

Exercice 7 Exprimer, en fonction de $\ln(2)$ et $\ln(5)$ les valeurs de :

a) $\ln(10)$ b) $\ln(25)$ c) $\ln(16)$ d) $\ln(400)$ e) $\ln\left(\dfrac{2}{25}\right)$ f) $\ln\left(\dfrac{5}{8}\right)$

g) $\ln(0,4)$ h) $\ln(\sqrt{5})$ i) $\ln(2\sqrt{2})$ k) $\ln(5\sqrt{10})$

III - Étude de la fonction logarithme népérien

1) Sens de variation

Par définition, la fonction logarithme népérien vérifie, pour tout $x > 0$, $\ln'(x) = \dfrac{1}{x} > 0$, ce qui montre qu'elle est strictement croissante sur $]0;+\infty[$:

Propriété

x	0	$+\infty$
$\ln'(x)$	$\|\|$	$+$
$\ln$	$\|\|$	$\nearrow$

Corollaire

— *Comme de plus,* $\ln(1) = 0$, *on remarque alors que* $\ln(x) < 0 \iff x \in]0;1[$ *et* $\ln(x) > 0 \iff x \in]1;+\infty[$

x	0		1		$+\infty$
$\ln(x)$	$\|$	$-$	0	$+$	

— *Comme* $\ln$ *est strictement croissante sur* $]0;+\infty[$*, pour tous réels* a *et* b *strictement positifs,*
   — $\ln(a) = \ln(b) \iff a = b$
   — $\ln(a) \leqslant \ln(b) \iff a \leqslant b$
   — $\ln(a) < \ln(b) \iff a < b$

Exemple 1 : On considère l'équation $(E) : \ln(x+3) + \ln(x) = 0$.

On cherche à se ramener à une équation de la forme $\ln(a) = \ln(b) \iff a = b$.

$(E) \iff \ln(x(x+3)) = \ln(1) \iff x(x+3) = 1 \iff x^2 + 3x - 1 = 0$.

Cette équation du second degré a pour discriminant $\Delta = 3^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 13 > 0$ et admet donc deux solutions réelles $x_1 = \dfrac{-3-\sqrt{13}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{-3+\sqrt{13}}{2}$.

Exemple 2 : On considère l'inéquation $(I) : \ln(x-2) < 3$.

De même que précédemment, on à se ramener à une inéquation de la forme $\ln(a) < \ln(b) \iff a < b$.

$(I) \iff \ln(x-2) < \ln\left(e^3\right) \iff x - 2 < e^3 \iff x < 2 + e^3$

Exercice 8 Résoudre les équations suivantes :
a) $\ln\left(x^2-4\right) = \ln(5) + 2\ln(3)$ b) $\ln(x+2) = 2\ln(x)$ c) $\ln(x) + \ln(x+2) = \ln(9x-12)$

Exercice 9 Résoudre les inéquations suivantes :
a) $\ln(x-2) \leqslant 0$ b) $\ln(-2x+3) > 0$ c) $\ln(2x+1) - \ln(x+1) < 0$

Exercice 10 Déterminer le plus petit nombre n tel que
a) $1,032^n \geqslant 4$ b) $1,25^n \geqslant 12$ c) $0,92^n \leqslant 0,5$ d) $0,5^n \leqslant 0,1$

Exercice 11 On considère la suite géomtrique (u_n) de raison $q = 1,04$ et de premier terme $u_0 = 1000$.

Déterminer la plus petite valeur de $n$pour que $u_n \geqslant 2000$.

2) Limites

Pour tout entier p, on a $\ln\left(10^p\right) = p\ln(10) \simeq 2,30p$, on voit que $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$.

Propriété $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$.

Ainsi, la droite d'équation $x = 0$*, c'est-à-dire l'axe des ordonnées, est une asymptote verticale à la courbe représentative de* $\ln$ *en 0.*

Remarque : ln croît "lentement", l'image de 1 milliard par le logarithme népérien est "seulement" $\ln\left(10^9\right) = 9\ln(10) \simeq 20$...mais cela ne l'empêche pas de pouvoir devenir plus grand que n'importe quel nombre (cf. la définition de la limite infinie d'une fonction).

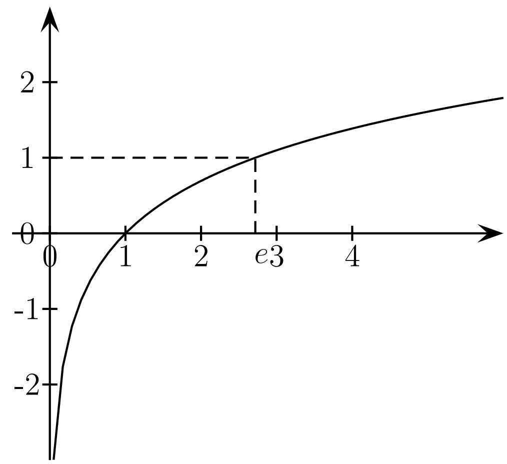
Exercice 12 Déterminer les limites suivantes :
a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3}{x} + \ln(x)$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty} 5x + \ln(x)$ c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(x)}{x}$ d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(x^2+3\right)$ e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\dfrac{x^2+3}{x^2+3x+12}\right)$

f) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ln\left(\dfrac{2x^2+x-3}{x+126}\right)$ g) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ln\left(\dfrac{x^2-3x+2}{x^3-6x}\right)$ h) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \dfrac{\ln(x)+3}{\ln(x)-5}$

On peut alors compléter le tableau de variation de ln

x	0	1	$+\infty$
$\ln'(x)$	$\|$	$+$	
$\ln$	$\|$ $-\infty$	$\nearrow$ 0	$\nearrow$ $+\infty$

et tracer l'allure de sa courbe représentative



D'après ce qui précède, il existe une unique solution x à l'équation $\ln(x) = 1$. On note ce nombre e : $\ln(e) = 1$.

Exercice 13 À l'aide de la calculatrice, donner une valeur approchée à 10^{-3} près du nombre e.

Par définition de ce nombre e, on a $\ln(e) = 1$ et donc, entre autres exemples, $\ln\left(e^2\right) = 2\ln(e) = 2$, et aussi $\ln\left(e^{12}\right) = 12$, $\ln\left(e^{-3}\right) = -3$, $\ln\left(\sqrt{e}\right) = \dfrac{1}{2}$, ...

On peut alors résoudre des équations contenant un logarithme népérien : comme $\ln\left(e^a\right) = a$, on a directement $\ln(x) = a \iff x = e^a$

Exercice 14 À l'aide de la calculatrice, donner une valeur approchée à 10^{-3} près de la solution de l'équation $\ln(x) = 3$.

Vérifier que l'on a $x = e^3$.

3) Croissances comparées en l'infini

On a vu que la croissance en l'infini du logarithme népérien est "lente". On cherche à préciser cette "lenteur", en comparant ce comportement avec celui des fonctions de référence : les polynômes.

Exercice 15 À l'aide de la calculatrice (calculs de valeurs, courbe représentative, tableau de valeurs,...), conjecturer les limites :

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} x - \ln(x)$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x}$ c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^2}$ d) $\lim\limits_{x\to 0} x\ln(x)$ e) $\lim\limits_{x\to 0} x\Big(\ln(x)\Big)^4$

Les limites de cet exercice sont toutes des formes indéterminées. Le théorème suivant permet de les lever :

Théorème $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$, *et plus généralement, pour tout entier non nul n,* $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^n} = 0$.

De même en 0, $\lim\limits_{x\to 0} x\ln(x) = 0$, *et pour tout entier non nul n,* $\lim\limits_{x\to 0} x^n\ln(x) = 0$.

En d'autres termes, le logarithme est négligeable, en 0 et l'infini, devant les fonctions polynômes.

Exercice 16 On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = x - \ln(x)$.

1. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$. Interpréter graphiquement ces résultats.
2. Etudier le sens de variation de f sur $]0;+\infty[$.
3. Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 1.
4. Tracer l'allure de la courbe représentative de f.

Exercice 17 Déterminer les limites en $+\infty$ des fonctions suivantes :

a) $f(x) = x^2 + \dfrac{\ln(x)}{x}$ b) $f(x) = x - \ln(x)$ c) $f(x) = x^2 - 6x - \ln(x)$ d) $f(x) = 3x^3 + 2x^2 + 5\ln(x)$

e) $f(x) = \dfrac{1+\ln(x)}{x}$ f) $f(x) = \dfrac{\ln(x)+16}{x+6}$ g) $f(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{x}{\ln(x)}$ h) $f(x) = \dfrac{x+1}{\ln(x)+1}$

IV - Logarithme décimal

Définition *La fonction logarithme décimal, notée* log, *est la fonction définie sur* $]0;+\infty[$ *par l'expression* $\log(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(10)}$.

Exemples de valeurs :

$\log(1) = \dfrac{\ln(1)}{\ln(10)} = 0$;

$\log(10) = \dfrac{\ln(10)}{\ln(10)} = 1$;

$\log(100) = \log\left(10^2\right) = \dfrac{\ln\left(10^2\right)}{\ln(10)} = \dfrac{2\ln(10)}{\ln(10)} = 2$;

et plus généralement, $\log\left(10^n\right) = \dfrac{\ln\left(10^n\right)}{\ln(10)} = \dfrac{n\ln(10)}{\ln(10)} = n$;

Remarque : $\log(x) = \dfrac{1}{\ln(10)}\ln(x) = k\ln(x)$, avec $k \simeq 2,30$, et la fonction logarithme décimal a les mêmes propriétés que la fonction logarithme népérien : sens de variation, signe, limites…

La base 10 joue ici le rôle de la bse e pour le logarithme népérien. En particulier, pour le logarithme népérien $\ln(x) = n \iff x = e^n$, et pour le logarithme décimal, $\log(x) = n \iff x = 10^n$: le logarithme décimal est la fonction réciproque de la fonction puissance de 10 : $x \mapsto 10^x$.

Le logarithme décimal est très utilisé en physique : pH d'une solution ou encore intensité en décibel d'un son.

Exercice 18 **Intensité acoustique en dB et isolation phonique**

L'intensité acoustique en décibels (dB) d'un son est donnée par $L = 10\log\left(\dfrac{I}{I_0}\right)$, où I est l'intensité du son étudié et I_0 une intensité de référence (I et I_0 en Watts par mètres carrés, $W.m^{-2}$). On donne $I_0 = 10^{-12}\,W.m^{-2}$.

A. 1. Un haut parleur diffuse de la musique ; l'intensité du son est égale à $10^{-6}\,W.m^{-2}$. Calculer l'intensité acoustique L_1 en dB.

2. On ajoute un deuxième haut parleur identique au premier, et l'intensité du son double. Calculer l'intensité acoustique en dB correspondante.
A-t'on $L_2 = 2L_1$?

3. On multiplie par 10 l'intensité sonore (ou on utilise 10 haut parleurs identique simultanément). Calculer l'intensité acoustique en dB correspondante.
4. Le seuil de danger pour l'oreille humaine est à 90 dB. Calculer l'intensité du son correspondante.

B. **Isolation phonique** On dispose de plaques d'isolation phonique permettant d'absorber 8% de l'intensité du son qui lui parvient.

Pour concevoir un système d'isolation performant, on superpose ces plaques.

On utilise pour tester notre système d'isolation une source de référence qui émet un son d'intensité 100dB.

1) Déterminer l'intensité du son après atténuation par une plaque.
2) Déterminer l'intensité du son après atténuation par deux plaques successives.
3) On note u_n l'intensité du son mesurée après la traversée de n plaques.
   a) Donner u_0, u_1 et u_2, puis exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.
   b) Quelle est la nature de la suite (u_n). En déduire l'expression u_n en fonction de n et u_0.
   c) Quelle intensité sonore obtient'on avec 10 plaques ?
   d) Combien de plaques faut-il utiliser pour que l'intensité du son devienne inférieur à 1dB.

V - Autres fonctions logarithmes

Plus généralement, pour $a > 0$, on définit le logarithme de base a par $\log_a(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(a)}$.

Le logarithme népérien est le logarithme de base e : $\log_e(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(e)} = \ln(x)$, car $\ln(e) = 1$; le logarithme décimal est le logarithme de base 10.

Une autre fonction logarithme assez utilisée est le logarithme de base 2 (ou logarithme binaire) : $\log_2(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(2)}$.

Exemples de valeurs :

$\log_2(1) = \dfrac{\ln(1)}{\ln(2)} = 0$;

$\log_2(2) = \dfrac{\ln(2)}{\ln(2)} = 1$;

$\log_2(4) = \log\left(2^2\right) = \dfrac{\ln\left(2^2\right)}{\ln(2)} = \dfrac{2\ln(2)}{\ln(2)} = 2$;

$\log_2(8) = \log\left(2^3\right) = \dfrac{\ln\left(2^3\right)}{\ln(2)} = \dfrac{3\ln(2)}{\ln(2)} = 3$;

et plus généralement, $\log\left(2^n\right) = \dfrac{\ln\left(2^n\right)}{\ln(2)} = \dfrac{n\ln(2)}{\ln(2)} = n$;

Comme pour le logarithme décimal, toutes les propriétés de la fonction logarithme népérien s'étendent au logarithme de base deux.

Ce logarithme est notamment grandement utilisé en informatique où l'information contenue dans un bit (binary digit) ne peut prendre que deux valeurs (codées 0 ou 1).

Avec deux bits, on peut coder 2^2 valeurs différentes ; vec un octet, soit 8 bits, on peut coder $2^8 = 256$ valeurs...