Suites et limites - Exercices

Exercice 1 Je décide de placer 10 000 euros sur un compte épargne rémunéré à 4% à intérêts composés.

1. Quel est le montant dont je dispose au bout de une année ? de deux années ? de dix années ?
2. Au bout de combien d'années mon capital aura-t'il doublé ?
3. Combien d'années faudra-t'il attendre pour avoir un capital de 50 000 euros ?

Exercice 2 Soit (u_n) une suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = n^2 + n - 1$.

1. Exprimer en fonction de n : a) u_{n-1} b) u_{n+1} c) $u_{n+1} - u_n$
2. La suite (u_n) est-elle géométrique ?

Exercice 3 Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n non nul par $u_n = \dfrac{n+1}{n^2+1}$.

1. Déterminer la fonction f telle que $u_n = f(n)$.
2. Etudier le sens de variation de f et en déduire celui de (u_n).
3. Calculer u_{10}, u_{100}, $u_{10\,000}$, u_{10^8} et $u_{10^{18}}$.
   Que peut-on dire des valeurs u_n lorsque n devient de plus en plus grand ?

Exercice 4 Même exercice avec les suites (u_n) définies par les expressions suivantes :

1) $u_n = \dfrac{n^2-1}{n^2+1}$. 2) $u_n = 3n^2 + 4n - 5$. 3) $u_n = -n^3 + 6n^2 - 9n + 5$.

Exercice 5 (u_n) est la suite définie par $u_0 = 3$ et, pour tout entier n, $u_{n+1} = \dfrac{3u_n}{3+2u_n}$.

Calculer les premiers termes u_1, u_2, u_3, u_4, puis u_{10}, u_{100}, u_{1000}.
Quel semble être le comportement des valeurs u_n lorsque n devient de plus en plus grand ?

Exercice 6 (u_n) est la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier n, $u_{n+1} = \dfrac{2}{3}u_n - \dfrac{1}{6}$.

Calculer les premiers termes u_1, u_2, u_3, u_4, puis u_{10}, u_{100}, u_{1000}.
Quel semble être le comportement des valeurs u_n lorsque n devient de plus en plus grand ?

Exercice 7 On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies par $u_n = 0,9999^n$ et $v_n = 1,0001^n$.

1. Montrer que ces deux suites sont des suites géométriques, en precisant leurs premier terme et raison.
2. Indiquer la valeur de n à partir de laquelle on a :
   a) $u_n \leqslant 0,9$ b) $u_n \leqslant 0,5$ c) $u_n \leqslant 0,1$ d) $u_n \leqslant 10^{-3}$ e) $u_n \leqslant 10^{-6}$ f) $u_n \leqslant 10^{-9}$
3. De même, indiquer la valeur de n à partir de laquelle on a :
   a) $v_n \geqslant 2$ b) $v_n \geqslant 10$ c) $v_n \geqslant 10^3$ d) $v_n \geqslant 10^6$ e) $v_n \geqslant 10^9$ f) $v_n \geqslant 10^{30}$
4. Quel semble être le comportement de ces deux suites lorsque n devient de plus en plus grand ?

Exercice 8 On définit la suite (u_n) par l'expression $u_n = n^2 - 20n$, pour tout entier naturel n.

1. Démontrer que pour tout entier n, $u_n = (n-10)^2 - 100$.
2. Déterminer à partir de quel rang n on a $u_n \geqslant 10^6$.
3. Déterminer à partir de quel rang n on a $u_n \geqslant 10^{12}$.
4. Soit p un entier naturel quelconque. Déterminer à partir de quel rang n on a $u_n \geqslant 10^p$.
   Conclure quant à la limite de la suite (u_n).

Exercice 9 Soit la suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{10^6}{n+1}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Donner les valeurs des premiers termes u_0, u_1, u_2, puis de u_{10}, u_{100}, u_{10^4}, u_{10^6}.
   Quel semble être le comportement des valeurs u_n lorsque n devient grand ?
2. Déterminer à partir de quel rang n on a $u_n \leqslant \dfrac{1}{100}$.
3. Déterminer à partir de quel rang n on a $u_n \leqslant 10^{-6}$.
4. Soit p un entier naturel quelconque, déterminer à partir de quel rang n on a $u_n \leqslant 10^{-p}$.
   Conclure quant à la limite de la suite (u_n).

Exercice 10 Soit (u_n) la suite définie pour tout entier n par $u_n = \dfrac{n-2}{n+2}$.

1. Démontrer que, pour tout entier n, $u_n - 1 = \dfrac{-4}{n+2}$.
2. Déterminer à partir de quel rang n on a $|u_n - 1| \leqslant 10^{-3}$.
3. Déterminer à partir de quel rang n on a $|u_n - 1| \leqslant 10^{-9}$.
4. Soit p un entier naturel quelconque, déterminer à partir de quel rang n on a $|u_n - 1| \leqslant 10^{-p}$.
   Conclure quant à la limite de la suite (u_n).

Exercice 11 Dans chacun des cas suivants, déterminer la limite de la suite (u_n) :

a) $u_n = n^3 + \dfrac{1}{n}$ b) $u_n = (3n+1)(-7n+5)$ c) $u_n = \dfrac{3 - \dfrac{4}{n}}{\dfrac{2}{n^2}}$ d) $u_n = n^3 - n^2 - 1$ e) $u_n = \dfrac{2n^2+1}{-n^2+6}$

f) $u_n = \dfrac{n^2+3n-5}{n^3-6n^2+1}$ g) $u_n = \dfrac{9-n^2}{(n+1)(2n+1)}$ h) $u_n = \dfrac{1}{3} - \dfrac{n}{2n+1}$ i) $u_n = \dfrac{2}{3n} - \dfrac{2n^2+3}{3n^2+n+1}$

Exercice 12 Soit (u_n) la suite géométrique définie par $u_0 = 8$ et pour tout entier n par $u_{n+1} = -\dfrac{1}{2}u_n$.

1. Calculer u_1, u_2, u_3, u_4 et u_5.
2. Exprimer u_n en fonction de n.

Exercice 13 Une population de bactéries double chaque jour. Il y a initialement 1000 bactéries.
On note u_n le nombre de bactéries le n$^{\text{ième}}$ jour.

1. Quelle est la nature de la suite (u_n).
2. Déterminer le nombre de bactéries présentent au bout de 3 jours, puis au bout de 10 jours.
3. Au bout de combien de jours, la population sera-t'elle supérieure à 10 000 000.

Exercice 14 On place un capital de 10 000 euros avec intérêts composés au taux de 2,3% par an. Cela signifie que les intérêts d'une année s'ajoutent au capital et produisent à leur tour des intérêts l'année suivante.

On note C_n le capital acquis au bout de n années. En particulier $C_0 = 10\,000$ euros.

1. Calculer C_1, C_2 et C_3.
2. Donner pour tout entier n l'expression de C_{n+1} en fonctin de C_n.
   En déduire que (C_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.
3. Donner l'expression de C_n en fonction de n.
4. Au bout de combien d'années le capital initial aura-t'il doublé ?

Exercice 15 On dispose d'une citerne d'un volume de 1500 litres remplie au deux tiers.
Chaque jour, 5% de son contenu s'évapore.
On note v_n le volume d'eau contenu dans la citerne au bout de n jours.

1. Donner la valeur de v_0, le volume initial d'eau dans la citerne, puis de v_1 et v_2.
2. Quelle est la nature de la suite (v_n).
3. Peut-on arroser, après dix jours, 65 arbustes, chacun de ceux-ci nécessitant 10 litres d'eau ?

Exercice 16 Un groupe industriel décide de réduire progressivement sa quantité de rejets de 4% par an. L'objectif du groupe est de diminuer globalement ses rejets, de 50 000 tonnes par an en 2010, à une quantité inférieur à 30 000 tonnes en 10 ans.

1. Quelle est la quantité de rejets du groupe en 2011 ? en 2012 ?
2. On note r_n la quantité de rejets l'année "$2010 + n$".
   a) Exprimer r_{n+1} en fonction de r_n.
   Quelle est la nature de la suite r_n ?
   b) Exprimer alors r_n en fonction de n.
   c) Calculer, à la tonne près, la quantité de rejets en 2020.
   L'objectif global annoncé est-il atteint ?
3. Un taux annuel de diminution de 5% permettrait-il de respecter la norme ?

Exercice 17 Soit la suite géométrique (u_n) définie par $u_0 = 27$ et pour tout entier n par $u_{n+1} = -\dfrac{1}{3}u_n$.

1. Calculer la somme $S_{10} = u_0 + u_1 + \cdots + u_{10}$.
2. Exprimer u_n en fonction n, puis la somme $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.
   Quel semble être la limite de S_n ?

Exercice 18 (u_n) est une suite géométrique telle que $u_2 = 4$ et $u_4 = \dfrac{16}{9}$.
Calculer la somme $S_{15} = u_0 + u_1 + \cdots + u_{15}$.

Exercice 19 Déterminer la limite des suites définies par les expressions suivantes :
a) $u_n = 3 \times 2,3^n$ b) $u_n = -600 \times 0,2^n + 0,003$ c) $u_n = \dfrac{2 + 0,98^n}{3 \times 0,97^n + 6}$ d) $u_n = 3 \times (-1,3)^n$