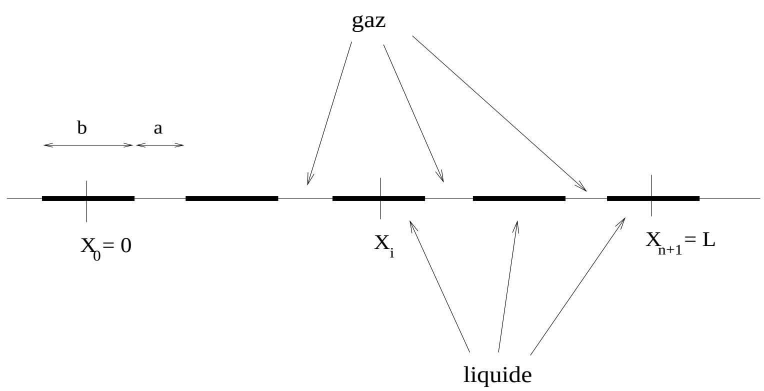
TP 10
Propagation d'ondes
Exemple de contrôle non-destructif

1. Modèle physique

On cherche à modéliser la propagation d'ondes dans un mélange liquide-gaz. On suppose que le liquide est incompressible, et que le gaz, compressible, se trouve sous la forme de petites bulles qui contiennent le même nombre de molécules. On s'intéressera ici à une modélisation mono dimensionnelle de cette situation : on considère sur le segment $[0, L]$ une alternance de gaz rt de liquide, comme illustré sur la figure ci-dessous.



On note ρ la masse linéique du liquide, de telle sorte que la masse d'un "segment" S_i centré en x_i est ρb. Le gaz piégé entre deux segments successifs est supposé obéir à la loi des gaz parfaits à température constante, c'et-à-dire

(pression) $\times$ (volume) = Constante $\times$ (nombre de molécules de gaz)

soit,

$$PV = kN \,,$$

où le "volume" représente en fait une longueur dans le cadre mono dimensionnel. On suppose les deux extrémités fixes (x_0 et x_{n+1} positionnés en 0 et L, respectivement), et on prend un nombre de molécules de gaz dans chaque poche constant égal à N. On considérera que N s'écrit $\beta(a+b)$ où β est le nombre de molécules de gaz par unité de longueur du mélange. Ce système liquide/gaz admet un état d'équilibre, représenté schématiquement sur la figure précédente, pour lequel toutes les bulles ont même taille b. Les positions des centres des segments fluides sont, dans ce cas, en notant $h = a + b$,

$$X_0 = 0,\ X_1 = h,\ \cdots,\ X_i = ih,\ \cdots,\ X_{n+1} = (n+1)h = L\,.$$

2. Equation d'évolution

On note $x_i = X_i + u_i$ la position du centre de S_i ($i^{\text{ème}}$ segment), de telle sorte que l'état d'équilibre correspond à $u_i = 0$ pour tout i. Le bilan F_i des forces s'exerçant sur un élément de liquide centré en x_i est la somme des pressions exercées à droite et à gauche par le gaz, c'est-à-dire, d'après le modèle précédent,

$$F_i = k\beta h \left(\frac{1}{a + u_i - u_{i-1}} - \frac{1}{a + u_{i+1} - u_i} \right) .$$

La masse de S_i étant ρb, la relation fondamentale de la dynamique s'écrit donc

$$\rho b u_i^{''} = F_i \,.$$

On note $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \cdots, u_n)$ le vecteur des inconnues, $v_i = u_i'$ la vitesse de S_i, $\mathbf{v}$ le vecteur des v_i (donc $v_i = \frac{du_i}{dt}$, et $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{u}}{dt}$)

et $\mathbf{F}$ le vecteur des forces F_i. On peut se ramener de cette façon à une équation différentielle ordinaire (dans $\mathbb{R}^{2n}$),

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{v} \\ \rho b \dfrac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{u}) \,. \end{cases} \tag{1}$$

3. Vitesse de propagation

On cherche à estimer la vitesse de propagation associée au modèle décrit ci-dessus, pour des ondes de faible amplitude (i.e. $u_i << a + b$). La force F_i peut s'exprimer suivant

$$\begin{aligned} F_i &= k\beta h \left(\frac{1}{a + u_i - u_{i-1}} - \frac{1}{a + u_{i+1} - u_i} \right) \\ &= k\beta h \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{(a + u_i - u_{i-1})(a + u_{i+1} - u_i)} \\ &= k\beta h \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} \frac{1}{\left(\alpha + \frac{u_i - u_{i-1}}{h}\right)\left(\alpha + \frac{u_{i+1} - u_i}{h}\right)} \,, \end{aligned}$$

avec $h = a + b$ et $\alpha = a/(a + b) = a/h$. On identifie maintenant les expressions faisant intervenir les u_i à des dérivées en espace de u (cf. méthode des différences finies) :

$$\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} \sim \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(X_i) \,, \quad \frac{u_i - u_{i-1}}{h} \sim \frac{u_{i+1} - u_i}{h} \sim \frac{\partial u}{\partial x}(X_i) \,.$$

On aboutit donc, formellement, à l'équation aux dérivées partielles sur u (en remarquant que $b/h = 1 - \alpha$)

$$\rho(1 - \alpha)u'' - \frac{k\beta}{(\alpha + u')^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \,.$$

Si l'on fait l'hypothèse supplémentaire que u' reste petit devant α, on obtient, toujours formellement, l'équation

$$u'' - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \,, \quad \text{avec } c^2 = \frac{k\beta}{\rho(1 - \alpha)\alpha^2} \,,$$

où c est donc la vitesse de propagation de l'onde dans ce milieu.

Cette équation est l'équation des ondes. Son étude et sa simulation ont fait l'objet du TP précédent.

4. Propagation d'une onde dans un milieu homogène

On se propose de résoudre numériquement le système (1) pour modéliser la propagation d'une onde dans le milieu (sans faire, a priori d'hypothèse de type "petits déplacements").

Pour perturber le système, on va agir sur la position du point x_0, qu'on ne supposera donc plus fixe, mais dont la position va être imposée au cours du temps.

On introduit une discrétisation de l'intervalle en temps $[0, T]$:

$$t_0 = 0 < t_1 = \delta_t < t_2 = 2\delta_t < \cdots < t_M = M\delta_t = T \,,$$

et on note u_n^m (resp. v_n^m) l'approximation de u_n (resp. v_n) au temps t_m. On discrétise alors le système (1) de la façon suivante :

$$\begin{cases} \dfrac{u_n^m - u_n^{m-1}}{\delta_t} & = v_n^m \\ \rho b \dfrac{v_n^{m+1} - v_n^m}{\delta_t} & = k\beta h \left(\dfrac{1}{a + u_n^m - u_{n-1}^m} - \dfrac{1}{a + u_{n+1}^m - u_n^m} \right) \end{cases} ,$$

ce qu'on peut finalement écrire, en éliminant les v :

$$u_n^{m+1} = 2u_n^m - u_n^{m-1} + \delta_t^2 \mu \left(\frac{1}{a + u_n^m - u_{n-1}^m} - \frac{1}{a + u_{n+1}^m - u_n^m} \right) ,$$

avec $\mu = k\beta h/\rho b$. Les conditions aux limites en espace s'écrivent

$$u_0^m = \lambda(t) \ , \ u_N^m = 0 \ \forall\, m = 0, \cdots , M \ ,$$

où $\lambda(t)$ est donnée, et les conditions en temps

$$u_n^0 = U_n^0 \ , \ u_n^{-1} = U_n^{-1} \ \forall\, n = 0, \cdots , N \ ,$$

où les U_n^0 et U_n^{-1} sont des données qui permettent de représenter l'état du système au temps initial.

A partir de ces relations, on peut alors calculer les u_n^m pour tout n et tout M.

Calcul numérique. Calculer numériquement les u_n^m. On pourra prendre comme valeur des paramètres :

$$\rho = 1 \ , \ N = 99 \ , \ L = 1.0 \ , \ \alpha = 0.2 \ , \ \beta = 1 \ , \ k = 1.0 \ , \ \delta_t = 10^{-3} \ , \ T = 2 \ , \ h = 10^{-2} \ , \ b = 1.$$

5. Propagation d'une onde dans un milieu inhomogène

On considère maintenant que la densité, ou masse linéique, ρ n'est plus constante, soit $\rho := \rho(x)$. On discrétise comme précédemment : $\rho_n = \rho(X_n)$.

Modifier le programme de calcul précédent afin de permettre la prise en compte d'une densité non constante, i.e. un milieu inhomogène.

Reprendre les valeurs numériques précédentes, en modifiant uniquement ρ suivant :

$$\rho_n = \begin{cases} 2 \ , \text{ si } n = 50 \\ 1 \ , \text{ sinon} \end{cases} .$$

6. Exemple de contrôle non destructif

La problématique est maintenant la suivante : comment à partir des seules données et observations en $x = 0$ et/ou $x = L$ déterminer si le matériau est homogène ou non, et alors dans ce cas, de manière plus ambitieuse, déterminer la profondeur à laquelle est situé l'inhomogénéité ?

A partir des calculs et observations effectués dans les deux paragraphes précédents, donner une méthode permettant de

– détecter la présence d'une inhomogénéité dans le milieu ;
– calculer la profondeur (abscisse) à laquelle se trouve cette inhomgénéité .