TP 8
Simulation monodimensionnelle de la propagation d'une onde

La propagation d'une onde, acoustique ou électromagnétique, est régie par l'équation de Helmohltz, pour $t > 0$ et $x \in D$, le domaine géométrique étudié :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(x,t) - c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) = 0\,, \tag{1}$$

où c désigne la célérité de l'onde dans le milieu considéré ($c = 3.10^8$ m.s^{-1} pour la lumière dans le vide, par exemple), et la fonction f désigne l'amplitude de l'onde au point x et à l'instant t.

Cette équation n'est pas suffisante pour décrire complètement la propagation de l'onde ; il faut la compléter de conditions initiales (état et vitesse de l'onde à l'instant initial $t = 0$), ainsi que des conditions au bord (comportement de l'onde lorsqu'elle rencontre les limites physiques du domaine étudié).

Ces conditions peuvent se formuler suivant :

$$\left\{\begin{array}{lll} f(x,0) & = h(x) & ,\ \forall x \in D \\ \dfrac{\partial f}{\partial t}(x,0) & = \tilde{h}(x) & ,\ \forall x \in D \\ f(x,t) & = g(t) & ,\ \forall t > 0 \quad \text{et, } \forall x \in \partial D\,, \end{array}\right. \tag{2}$$

les fonctions h, $\tilde{h}$ et g étant des données du problème.

Le but de cette partie est de résoudre numériquement sous Matlab la propagation d'une onde, i.e. de résoudre numériquement le jeu d'équations (1) et (2), dans le cas simple 1-D, c'est-à-dire lorsque le domaine D est un intervalle : $D =]a,b[$.

La cas 1-D correspond par exemple à la simulation du mouvement d'une corde (de piano ou de guitare par exemple), ou de l'amplitude d'un champ électrique ou magnétique en polarisation TE ou TM.

Discrétisation de l'équation de Helmohltz (1)

On cherche une solution approchée de (1) en 1-D : le domaine géométrique dans lequel l'onde peut se propager est le segment $[0\,,L]$. On s'interesse alors à l'onde $f(x,t)$ pour $x \in [0\,,L]$ et $t \in [0\,,T]$.

Discrétisation de (1) : Pour approximer l'onde solution de (1), nous allons utilisé la méthode numérique dite des différences finies.

On se donne tout d'abord pour cela une "grille" régulière de calcul, c'est-à-dire une discrétisation de l'ensemble $[0\,,L] \times [0\,,T]$: soit les deux suites

$$\{x_k\} = \{k\,\delta_x\}_{k=0\ldots L/\delta_x} \ ,\ \text{et, } \{t_k\} = \{k\,\delta_t\}_{k=0\ldots T/\delta_t}\ ,$$

où δ_x et δ_t désignent respectivement le pas de la grille en x (espace) et en t (temps).

Cette grille étant donnée, on cherche à calculer les valeurs de f aux noeuds de la grille. On notera

$$f_{i,j} := f(x_i, t_j)\,.$$

La deuxième étape est l'approximation des dérivées partielles de f à l'aide des éléments $f_{i,j}$. Cela s'effectue à l'aide de la formule de Taylor, par exemple pour la dérivée selon x :

$$f(x+\delta_x,t) = f(x,t) + \delta_x \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) + \frac{\delta_x^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) + O(\delta_x^3)\,,$$

ou, en d'autres termes

$$f_{i+1,j} = f_{i,j} + \delta_x \frac{\partial f_{i,j}}{\partial x} + \frac{\delta_x^2}{2}\frac{\partial^2 f_{i,j}}{\partial x^2} + O(\delta_x^3)\,.$$

On peut de cette manière approximer les dérivées secondes de f par rapport à x et t (en considérant aussi par exemple le développement de Taylor de $f(x-\delta_x,t)$ et en sommant les relations).

On obtient, tous calculs fait :

$$\frac{\partial^2 f_{i,j}}{\partial t^2} \sim \frac{1}{\delta_t^2}\left[f_{i,j+1} + f_{i,j-1} - 2f_{i,j}\right]\,,$$

et,

$$\frac{\partial^2 f_{i,j}}{\partial x^2} \sim \frac{1}{\delta_x^2}\left[f_{i+1,j} + f_{i-1,j} - 2f_{i,j}\right]\,.$$

En combinant ces deux expressions avec l'équation de Helmohltz (1), on obtient la relation de récurrence :

$$f_{i,j+1} = -f_{i,j-1} + \gamma f_{i+1,j} + \gamma f_{i-1,j} - 2(1-\gamma)f_{i,j}\,, \tag{3}$$

où $\gamma = c^2\delta_t^2/\delta_x^2$.

Il ne reste plus alors qu'à initialiser la suite $f_{i,j}$ au moyen des équations (2).

Pour commencer, on pourra prendre $g = 0$. Cette condition modélise une paroi infiniment dure ; l'onde y sera totalement réfléchie.

La fonction $h(x)$ modélise l'état initial de l'onde, à l'instant $t = 0$. On pourra utiliser la fonction h, infiniment régulière :

$$h(x) = \begin{cases} A\exp\left(-\dfrac{1}{|(x-x_0)^2 - r^2|}\right)\ , \text{ pour } |x-x_0| \leq r \\ 0\ , \text{ ailleurs}\,, \end{cases}$$

où $A = \exp(1/r^2)$ permet de normaliser h, et où $x_0 \in [0, L]$ est le centre de la "cloche" $h(x)$ et $r > 0$ sa largeur.

La fonction $\tilde{h}$ modélise l'"impulsion", ou la vitesse, initiale donnée à l'onde. On pourra choisir pour commencer $\tilde{h} = 0$.

Travail à réaliser

Initialisation On prendra (pour commencer) les valeurs numériques suivantes : $c = 1\text{m.s}^{-1}$, $\delta_x = \delta_t = 10^{-3}$m, soit $\gamma = 1$, et $L = 1$m, $T = 1$s.

On définit ainsi la grille de calcul : $(x_i, t_j) \in [0 : \delta_x : L] \times [0 : \delta_t : T]$.

La solution $f(x,t)$, approximée aux point (x_i, t_j), sera alors stockée dans une matrice rectangulaire $F_{i,j}$.

On utilisera la fonction $h(x)$ définie précédemment pour définir l'état initial de l'onde, avec $x_0 = L/2$ et $r = L/5$, tandis que l'on imposera $\tilde{h}(x) = 0$ (vitesse initiale nulle).

L'initialisation s'implémente alors simplement suivant :

$$F(:,1) = h(:)\ ,\ \text{et, } F(:,2) = F(:,1) + \delta_t h_t(:)\,,$$

où $h_t(x)$ est la vitesse initiale de l'onde (on pourra prendre pour commencer $h_t = 0$).

La condition au bord : $f(x=0,t) = f(x=L,t)\,, \forall t$ se traduit quant à elle par :

$$F(1,:) = 0\ ,\ \text{et, } F(end,:) = 0\,.$$

Récurrence Il s'agit ici d'implémenter la relation de récurrence (3). Le calcul peut se faire à l'aide de deux boucles imbriquées : à chaque pas de temps (i.e. pour chaque j), on calcul tout les $F_{i,j}$ récursivement.

Visualisation du résultat Le comportement complet de l'onde est contenu dans la matrice F : chaque colonne contient l'amplitude de l'onde à un instant donné, chaque ligne correspondant à une abscisse.

On peut simplement visualiser la propagation de l'onde en utilisant la commande *imagesc(F)*.

L'amplitude de l'onde au n$^{\text{ième}}$ pas de temps s'affiche alors simplement par la commande *plot(*$[0:\delta_x:L], F(:,n)$*)*.

Comme il s'agit d'un problème d'évolution, il peut aussi être interessant de représenter ces tracés successivement. On pourra, par exemple, regrouper ces graphiques successifs dans une video à l'aide des commandes *getframe*, et *avifile*.

Suite de l'étude... On peut reprendre l'étude précédente, et modifier les conditions initiales et la condition au bord.

On pourra, par exemple, s'interesser au cas ou deux ondes existent initialement, et qui vont donner lieu à des phénomènes d'interférences (constructives ou destructives).

La condition au bord pourra elle aussi être modifiée en la condition dite de Neumann :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = 0 \ , \ \text{pour } x = 0 \ \text{ et } x = L \, .$$