Communication Numérique

Filtres et Signaux numériques

Yoann Morel

http://xymaths.free.fr/Signal/Communication-Numerique-cours-TP.php

Signal

- Physiquement, un signal est une quantité observable qui dépend d'un (ou plusieurs) paramètre.
  En général, un seul paramètre : le temps
  ex. : son, image, intensité d'un courant, position d'un mobile. . .

- Mathématiquement, on distinguera les signaux :
  - "à temps continu", ou plus généralement continu, c'est-à-dire une fonction (ou distribution) à une (ou plusieurs) variable $x(t)$ pour $t \in \mathbb{R}$.
  - discrets : $x = (x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$

Exemples de signaux

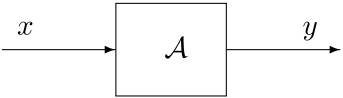
- Signal sinusoïdal, ou monochromatique :
  $x(t) = \gamma \cos(wt + \varphi)$, ou $x(t) = \Re e\left(\gamma e^{wt+\varphi}\right)$
- Echelon unité de Heaviside : $u(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t < 0 \\ 1 \text{ si } t \geq 0 \end{cases}$
- Sinus cardinal : $\mathrm{sinc}(t) = \dfrac{\sin(\pi t)}{\pi t}$
- Signal rectangulaire : $\mathrm{Rect}_a(t) = \begin{cases} 1 \text{ si } |t| \leq a/2 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$
- Impulsion de Dirac en a : δ_a telle que $< \delta_a, \varphi >= \varphi(a)$
- Peigne de Dirac : $< \Delta_a, \varphi >= \sum_{k \in \mathbf{Z}} \varphi(ka)$

Système :

- Physiquement, un système est un objet, un appareil, qui transforme un signal x en signal de sortie y.
  ex. : amplificateur, TV, robot, lunettes de soleil, ...

- Mathématiquement, un système est un opérateur :

$$\mathcal{A} : \left\{ \begin{array}{ccc} X & \rightarrow & Y \\ x & \mapsto & y = A(x) \end{array} \right.$$



Exemples :

- Fourier :

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\mathcal{F}} \longrightarrow \hat{x}(f)$$

- Amplificateur : $y(t) = a\,x(t)\,;\, a \in \mathbb{R}$
- Quadrateur : $y(t) = (x(t))^2$
- Ligne à retard : $y(t) = \tau_a x(t) = x(t-a)$
- Dérivateur : $y(t) = x'(t)$
- Intégrateur : $y(t) = \displaystyle\int_0^t x(s)\,ds$
- Equations différentielles, ...

Filtre :

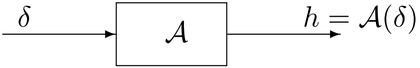
Un système $\mathcal{A}$ est dit :

- linéaire, si pour tous signaux x_1 et x_2 et tous réels λ et μ on a : $\mathcal{A}(\lambda x_1 + \mu x_2) = \lambda\mathcal{A}(x_1) + \mu\mathcal{A}(x_2)$
- invariant, si il est invariant par rapport aux retards : Si $y(t)$ est le signal obtenu en sortie du signal $x(t)$: $y = \mathcal{A}(x)$, alors l'entrée $x(t-\tau)$ donne la sortie $y(t-\tau)$, pour tout retard τ
- Continu, c'est la continuité au sens mathématique de $\mathcal{A}$: pour des signaux d'entrée $x_1(t)$ et $x_2(t)$ "proches", les sorties correspondantes $y_1(t)$ et $y_2(t)$ le sont aussi.

Définition : Un filtre est un sytème linéaire, invariant et continu.

Définition : Réponse impulsionnelle d'un filtre

Soit $\mathcal{A}$ un filtre. On appelle réponse impulsionnelle (RI) du filtre $\mathcal{A}$ sa réponse à l'impulsion de Dirac.
On la note en général h : $h = \mathcal{A}(\delta)$.



Théorème des filtres :

i) Le système $\mathcal{A} : x \mapsto y = \mathcal{A}(x) = h * x$ est un filtre.

ii) Réciproquement, si $\mathcal{A}$ est un filtre, et h sa réponse impulsionnelle, alors,

pour tout signal x, $y = \mathcal{A}(x) = h * x$.

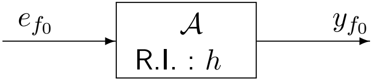
"Les filtres sont des systèmes de convolution"

Soit $\mathcal{A}$ un filtre de réponse impulsionnelle h, $e_{f_0}(t) = e^{2i\pi f_0 t}$ un signal monochromatique, et y_{f_0} la réponse du filtre au signal e_{f_0} :

$$e_{f_0} \longrightarrow \boxed{\begin{array}{c}\mathcal{A}\\ \text{R.I. : } h\end{array}} \longrightarrow y_{f_0}$$

Alors,

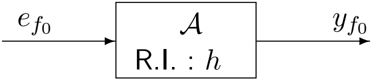
Soit $\mathcal{A}$ un filtre de réponse impulsionnelle h, $e_{f_0}(t) = e^{2i\pi f_0 t}$ un signal monochromatique, et y_{f_0} la réponse du filtre au signal e_{f_0} :



Alors,

$$y_{f_0}(t) = h * e_{f_0}(t)$$

Soit $\mathcal{A}$ un filtre de réponse impulsionnelle h, $e_{f_0}(t) = e^{2i\pi f_0 t}$ un signal monochromatique, et y_{f_0} la réponse du filtre au signal e_{f_0} :



Alors,

$$y_{f_0}(t) = h * e_{f_0}(t) \quad = \int_{\mathbb{R}} h(u) e^{2i\pi f_0 (t-u)}\, du$$

Soit $\mathcal{A}$ un filtre de réponse impulsionnelle h, $e_{f_0}(t) = e^{2i\pi f_0 t}$ un signal monochromatique, et y_{f_0} la réponse du filtre au signal e_{f_0} :

$$e_{f_0} \longrightarrow \boxed{\begin{array}{c}\mathcal{A}\\ \text{R.I. : } h\end{array}} \longrightarrow y_{f_0}$$

Alors,

$$\begin{aligned} y_{f_0}(t) = h * e_{f_0}(t) &= \int_{\mathbb{R}} h(u) e^{2i\pi f_0 (t-u)}\, du \\ &= e^{2i\pi f_0 t} \int_{\mathbb{R}} h(u) e^{-2i\pi f_0 u}\, du \end{aligned}$$

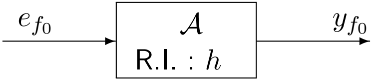
Soit $\mathcal{A}$ un filtre de réponse impulsionnelle h, $e_{f_0}(t) = e^{2i\pi f_0 t}$ un signal monochromatique, et y_{f_0} la réponse du filtre au signal e_{f_0} :

$$e_{f_0} \longrightarrow \boxed{\begin{array}{c}\mathcal{A} \\ \text{R.I. : } h\end{array}} \longrightarrow y_{f_0}$$

Alors,

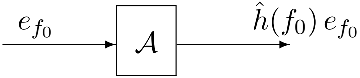
$$\begin{aligned}
y_{f_0}(t) = h * e_{f_0}(t) \quad &= \int_{\mathbb{R}} h(u) e^{2i\pi f_0 (t-u)}\, du \\
&= e^{2i\pi f_0 t} \int_{\mathbb{R}} h(u) e^{-2i\pi f_0 u}\, du \\
&= e_{f_0}(t) \cdot \widehat{h}(f_0)
\end{aligned}$$

Soit $\mathcal{A}$ un filtre de réponse impulsionnelle h, $e_{f_0}(t) = e^{2i\pi f_0 t}$ un signal monochromatique, et y_{f_0} la réponse du filtre au signal e_{f_0} :



Alors,

$$\begin{aligned} y_{f_0}(t) = h * e_{f_0}(t) &= \int_{\mathbb{R}} h(u) e^{2i\pi f_0 (t-u)}\, du \\ &= e^{2i\pi f_0 t} \int_{\mathbb{R}} h(u) e^{-2i\pi f_0 u}\, du \\ &= e_{f_0}(t) \cdot \widehat{h}(f_0) \end{aligned}$$



Tout signal monochromatique e_{f_0} est fonction propre du filtre $\mathcal{A}$; la valeur propre associée est $\widehat{h}(f_0)$.

Soit $\mathcal{A}$ un filtre de réponse impulsionnelle h, $e_{f_0}(t) = e^{2i\pi f_0 t}$ un signal monochromatique, et y_{f_0} la réponse du filtre au signal e_{f_0} : Alors,

$$\begin{aligned} y_{f_0}(t) = h * e_{f_0}(t) &= \int_{\mathbb{R}} h(u) e^{2i\pi f_0 (t-u)}\, du \\ &= e^{2i\pi f_0 t} \int_{\mathbb{R}} h(u) e^{-2i\pi f_0 u}\, du \\ &= e_{f_0}(t) \cdot \widehat{h}(f_0) \end{aligned}$$

$$e_{f_0} \longrightarrow \boxed{\mathcal{A}} \longrightarrow \hat{h}(f_0)\, e_{f_0}$$

Tout signal monochromatique e_{f_0} est fonction propre du filtre $\mathcal{A}$; la valeur propre associée est $\widehat{h}(f_0)$.

$H(f) = \widehat{h}(f)$ est la fonction de transfert du filtre $\mathcal{A}$.

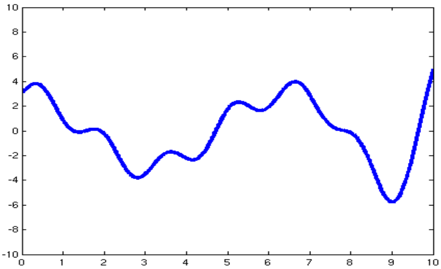
La fonction de transfert caractérise le filtre

Discrétisation d'un signal continu

Soit $x(t),\ t \in \mathbb{R}$ un signal continu.
Discrétiser le signal continu $x(t),\ t \in \mathbb{R}$ revient à approcher $x(t)$ par le signal discret $(x_k),\ k \in \mathbb{N}$.

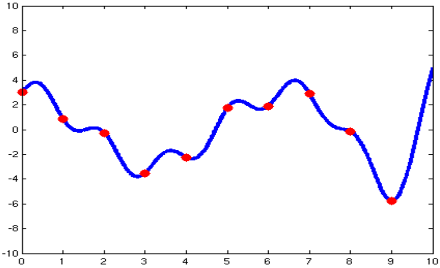
Discrétisation d'un signal continu

Soit $x(t),\ t \in \mathbb{R}$ un signal continu.
Discrétiser le signal continu $x(t),\ t \in \mathbb{R}$ revient à approcher $x(t)$ par le signal discret $(x_k),\ k \in \mathbb{N}$.



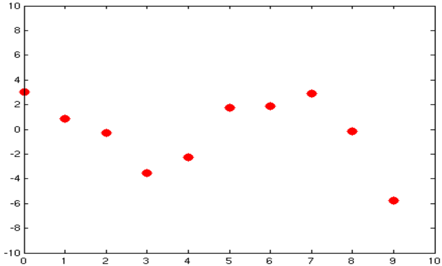
Discrétisation d'un signal continu

Soit $x(t),\ t \in \mathbb{R}$ un signal continu.
Discrétiser le signal continu $x(t),\ t \in \mathbb{R}$ revient à approcher $x(t)$ par le signal discret $(x_k),\ k \in \mathbb{N}$.



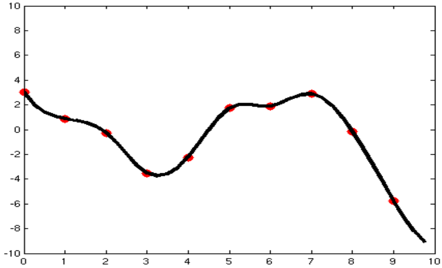
Discrétisation d'un signal continu

Soit $x(t),\ t \in \mathbb{R}$ un signal continu.
Discrétiser le signal continu $x(t),\ t \in \mathbb{R}$ revient à approcher $x(t)$ par le signal discret $(x_k),\ k \in \mathbb{N}$.



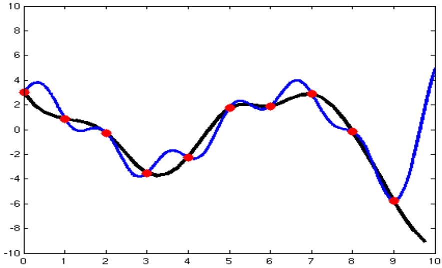
Discrétisation d'un signal continu

Soit $x(t), \; t \in \mathbb{R}$ un signal continu.
Discrétiser le signal continu $\underline{x(t), \; t \in \mathbb{R}}$ revient à approcher $x(t)$ par le signal discret $\underline{(x_k), \; k \in \mathbb{N}}$.



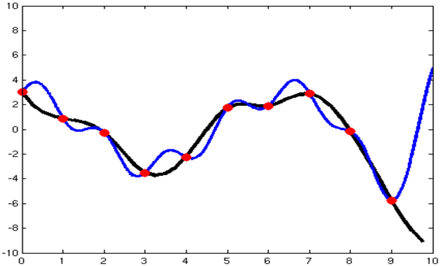
Discrétisation d'un signal continu

Soit $x(t),\ t \in \mathbb{R}$ un signal continu.
Discrétiser le signal continu $x(t),\ t \in \mathbb{R}$ revient à approcher $x(t)$ par le signal discret $(x_k),\ k \in \mathbb{N}$.



Discrétisation d'un signal continu

Soit $x(t),\ t \in \mathbb{R}$ un signal continu.
Discrétiser le signal continu $x(t),\ t \in \mathbb{R}$ revient à approcher $x(t)$ par le signal discret $(x_k),\ k \in \mathbb{N}$.



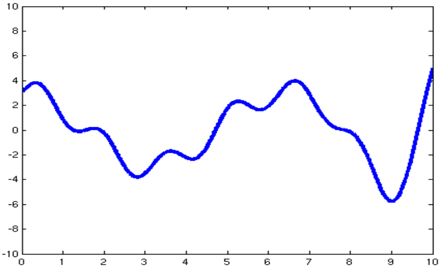
$\longrightarrow$ Est-il possible, connaissant (x_k), de reconstruire $x(t)$?

Le signal $x(t)$ est approché par le signal discret (x_k) : $x_k = x(kT_e)$.
On cherche à reconstruire le signal continu $x(t)$ à partir du signal discret (x_k).
On peut écrire :

$$\begin{aligned} x_k(t) = \sum_k x(t)\,\delta_{kT_e} \quad &= \sum_k x(t)\,\delta(t-kT_e) \\ &= x(t)\sum_k \delta(t-kT_e) = x(t)\ \Delta_{T_e}(t) \end{aligned}$$

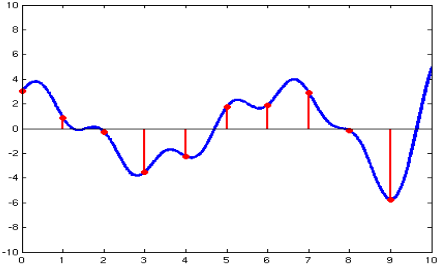
Le signal $x(t)$ est approché par le signal discret (x_k) : $x_k = x(kT_e)$.
On cherche à reconstruire le signal continu $x(t)$ à partir du signal discret (x_k).
On peut écrire :

$$\begin{aligned} x_k(t) = \sum_k x(t)\, \delta_{kT_e} &= \sum_k x(t)\, \delta(t - kT_e) \\ &= x(t) \sum \delta(t - kT_e) = x(t)\ \Delta_{T_e}(t) \end{aligned}$$



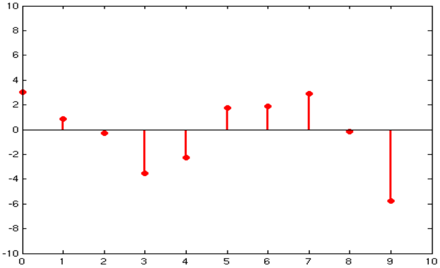
Le signal $x(t)$ est approché par le signal discret (x_k) : $x_k = x(kT_e)$.
On cherche à reconstruire le signal continu $x(t)$ à partir du signal discret (x_k).
On peut écrire :

$$\begin{aligned} x_k(t) = \sum_k x(t)\,\delta_{kT_e} &= \sum_k x(t)\,\delta(t-kT_e) \\ &= x(t)\sum_k \delta(t-kT_e) = x(t)\ \Delta_{T_e}(t) \end{aligned}$$



Le signal $x(t)$ est approché par le signal discret (x_k) : $x_k = x(kT_e)$.
On cherche à reconstruire le signal continu $x(t)$ à partir du signal discret (x_k).
On peut écrire :

$$\begin{aligned} x_k(t) = \sum_k x(t)\,\delta_{kT_e} &= \sum_k x(t)\,\delta(t-kT_e) \\ &= x(t)\sum_k \delta(t-kT_e) = x(t)\;\Delta_{T_e}(t) \end{aligned}$$



Le spectre du signal échantillonné (ou discrétisé) est alors :

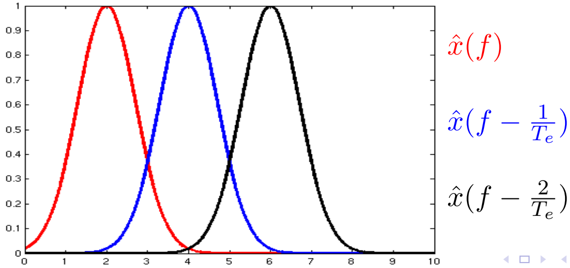
$$\begin{aligned}
\widehat{x_k}(f) &= \frac{1}{T_e}\,\hat{x}(f) * \Delta_{\frac{1}{T_e}}(f) \\
&= \frac{1}{T_e}\sum_k \hat{x}\left(f - \frac{k}{T_e}\right)
\end{aligned}$$

Echantillonner $x(t)$ avec la période T_e revient à périodiser $\hat{x}$ avec la période $\dfrac{1}{T_e}$.

Le spectre du signal échantillonné (ou discrétisé) est alors :

$$\begin{aligned} \widehat{x_k}(f) &= \frac{1}{T_e}\,\hat{x}(f) * \Delta_{\frac{1}{T_e}}(f) \\ &= \frac{1}{T_e} \sum_k \hat{x}\left(f - \frac{k}{T_e}\right) \end{aligned}$$

Echantillonner $x(t)$ avec la période T_e revient à périodiser $\hat{x}$ avec la période $\frac{1}{T_e}$.



La question est donc la suivante : si les deux signaux harmoniques

$$s_1(t) = c_1 \exp(2i\pi f_1 t)\,, \quad s_2(t) = c_2 \exp(2i\pi f_2 t)$$

échantillonés à la même fréquence F_e produisent les mêmes échantillons, sont-ils égaux ?
L'égalité des signaux à $t = 0$ donne $c_1 = c_2$, tandis que l'égalité des signaux à $t = T_e$ donne

$$\exp(2i\pi f_1\, T_e) = \exp(2i\pi f_2\, T_e)$$

soit,

$$\exp(2i\pi (f_1 - f_2)\, T_e) = 0$$

d'où, $f_1 - f_2 = \frac{k}{T_e} = k\, F_e \;, \quad k \in \mathbb{Z}$

$$|k\, F_e| = |f_1 - f_2| \leq |f_1| + |f_2| < 2|f_m|$$

où f_m est la plus grande des deux fréquences.

On aboutit ainsi au théorème de Shannon :

Théorème

Soit $s(t)$ *un signal qui admet une transformée de Fourier* $\hat{s}(f)$ *à bande limitée dans* $[-f_m; f_m]$*.*
On échantillonne ce signal à la fréquence F_e*.*
Si la fréquence d'échantillonnage vérifie :

$$F_e > 2f_m$$

alors, $s(t)$ *est l'unique signal à spectre limité dans* $[-f_m; f_m]$ *qui a pour échantillons les valeurs* $s(kT_e)$*.*

Dualité Temps / Fréquence :

Soit un signal discret (x_k), échantillonnage du signal $x(t)$ à la fréquence d'échantillonnage $f_e = \dfrac{1}{T_e}$:

$$x_k = x(k\,T_e)\ ,\quad k = 0 \dots N$$

Alors, sa T.F. $\widehat{x_k}(f)$ a :

- un pas fréquentiel $\delta_f = \dfrac{1}{N\,T_e}$
- une largeur de bande $\Delta_f = \frac{1}{T_e} = f_e$.

On a donc le compromis :

- Résolution fréquentielle $\leftrightarrow$ observation en temps long
- Résolution temporelle $\leftrightarrow$ grande largeur de bande